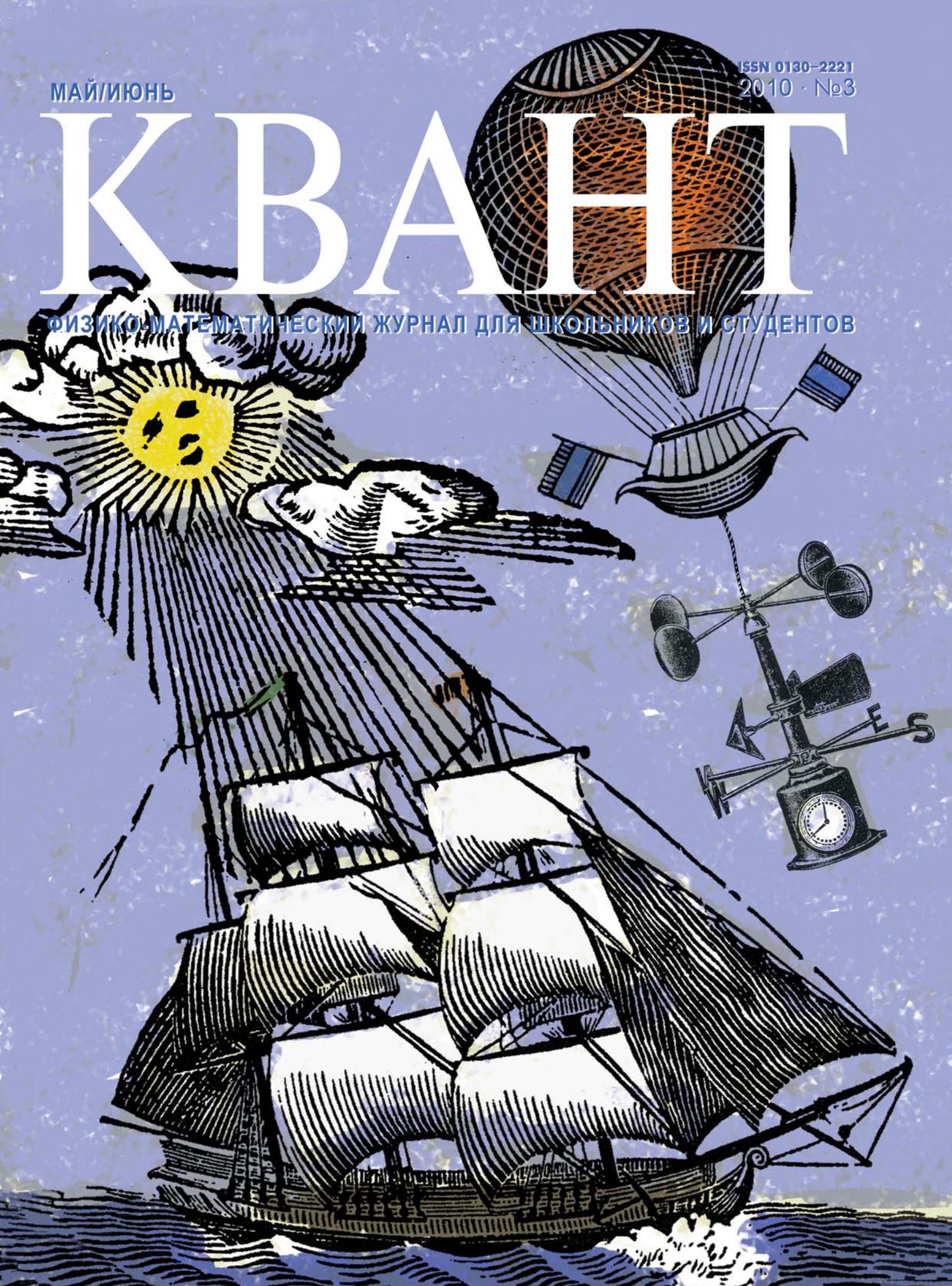


МАЙ/ИЮНЬ

ISSN 0130-2221
2010 · №3

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





ДВА, ТРИ, ЧЕТЫРЕ...

В 1980-х годах шведский изобретатель Эрик Йоханссон придумал серию замечательных головоломок. Каждая из них состоит из нескольких одинаковых элементов – зацепленных друг за друга деревянного и веревочного колец, причем длина веревки подобрана так, что деревянное кольцо не проходит сквозь веревочное. На рисунках видно, как такие элементы расположены в каждой головоломке. Легче всего изготовить ту, в которой всего два деревянных кольца. И решить ее – расцепить элементы – легче, чем остальные. Добавляя новые элементы (теоретически, их число не ограничено, но больше пяти колец трудно соединить нужным образом), можно усложнять задачу – чем больше колец, тем труднее их расцепить!

Е. Епифанов



Квант^{журнал} МАЙ 2010 №3 ИЮНЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Квант

Учредители — Российская академия наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипяна), ИФТТ РАН
Издатель — ООО НПП ОО «Бюро Квантум»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.С.Кротов

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбилин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, А.Р.Зильберман, В.В.Кведер (заместитель председателя редколлегии), П.А.Кожевников, В.В.Козлов (заместитель председателя редколлегии), С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произолов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджан, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Товарный знак «Журнал «Квант» является собственностью ООО НПП ОО «Бюро Квантум»
© 2010, РАН,
Фонд Осипяна, журнал «Квант»

- 2 Метеорологические наблюдения: распределенные в пространстве и во времени. *В.Гордин*
9 О сумме телесных углов многогранника. *И.Богданов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

- 15 105 лет академику С.М.Никольскому

НАНОТЕХНОЛОГИИ

- 17 Квантовые и волновые явления в наномире. *В.Тимошенко*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 23 По страницам сочинения Герона Александрийского «О диоптре». *А.Жуков*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 26 Задачи М2176–М2183, Ф2183–Ф2189
27 Решения задач М2154–М2158, М2160, Ф2168–Ф2174
35 Еще раз об окружностях, вписанных в криволинейные фигуры

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Постоянные магниты

К М Ш

- 36 Задачи
37 Хорошо темперированный клавир. *И.Гельфанд, А.Шень*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 40 Сверхзвуковые самолеты и конус Маха. *Е.Соколов*
42 Обжегшись на молоке, на воду дуют... *А.Стасенко*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 44 О пользе графиков. *М.Горелов*

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 48 Каустики на плоскости и в пространстве. *А.Андреев, А.Панов*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 50 Неравенство Коши в задачах по физике. *В.Гребень*

ИНФОРМАЦИЯ

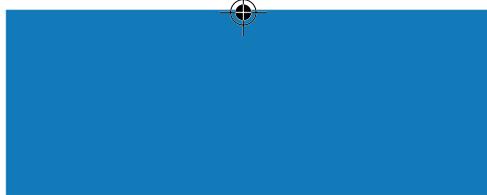
- 54 Заочная школа СУНЦ НГУ

ОЛИМПИАДЫ

- 56 XVIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»
59 Ответы, указания, решения Памяти М.Гарднера (25)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Метеорологические наблюдения»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*



Метеорологические наблюдения: распределенные в пространстве и во времени

В.ГОРДИН

Введение

*Зачем крутится ветер в овраге,
Подъемлет лист и пыль несет,
Когда корабль в недвижной влаге
Его дыханья жадно ждет?*

А.С.Пушкин. Египетские ночи

Александр Сергеевич на этот вопрос отвечает так: «Затем, что ветру и орлу // И сердцу девы нет закона». Однако ученые люди и до и после написания этих замечательных стихов тщились эти законы отыскать. Ведь интересно, красиво, а возможно, и полезно будет. Член Парижской академии наук Л.М.А.Навье предложил уравнения, описывающие динамику вязкой жидкости, за несколько лет до издания «Египетских ночей». Конечно, от этих уравнений до практического прогноза погоды была дистанция порядочная...

Какие бывают метеонаблюдения

Обсервации метеорологические отправляя с 1729 года, через которые не без великого беспрестанного старания и труда много нового мною изобретено, что надлежит до состояния погод здешнего климата, и еще все можно усмотреть из поданных мною в Академию надлежащих писем.

Г.Крафт

Уточним, что такое метеонаблюдение. Например, смотрим в окно – пешеходы идут с зонтиками. Или в шубах. Можно сделать кое-какие выводы. Летчику на полете к аэродрому сообщают: видимость сейчас плохая, но, судя по радару, приближается небольшое окно в облаках. Через три минуты будет понятно, садиться ли или идти на запасной аэродром. Это – наблюдения, которые используются сразу.

Разнообразных метеонаблюдений, поступающих в базу данных Гидрометцентра России, около 10^6 . И, видимо, будет больше. Современные технологии прогноза погоды позволяют давать его на несколько суток с довольно высокой точностью. Эти технологии – результат многовекового прогресса.

Количество осадков за весну измеряли левиты в Храме в Иерусалиме. Если суммарный уровень осадков превышал 7 ладоней (около 56 см), то ожидали хороший урожай летом.

В Египте измеряли подъем уровня Нила.¹ Причины подъема были загадочны. Две с половиной тысячи лет назад Геродот сообщил в своей «Истории» несколько версий – уже тогда они были старинными.

Обыкновенные для нас приборы – барометр, термометр – появились несколько веков назад. В 1597 году Г.Галилей изготовил термоскоп: стеклянный шар с водой и погруженная в него трубка. Уровень воды характеризовал температуру (лат. temperature – надлежащее смешение, нормальное состояние; темпермент – однокоренное слово). Позднее Сагрето, ученик Галилея, нанес на трубку деления – измерения получили количественный характер.²

Вода – непростая жидкость, ее объем не растет монотонно с температурой, минимум достигается при $4\text{ }^{\circ}\text{C}$.³ Поэтому в качестве рабочей жидкости ее использовать неудобно. В 1641 году во Франции уже имелись довольно совершенные спиртовые термометры (этот термин появился в 1636 г.). В 1715 году житель города Данцига Д.Фаренгейт наладил произ-

¹ Воду отводили в пруд и определяли уровень стоячей воды по высеченной на камне шкале в локтях и пальцах. Важнейшим был водомер на острове Рауда. Каждый день его смотритель докладывал правительству. Если подъем Нила был выше 12 локтей, глашатай возвещал об этом по всему Каиру.

² Это изобретение немедленно получило медицинское применение: венецианский врач Санторио в 1612 году опубликовал работу о повышении температуры тела при лихорадке.

³ Вот почему лед плавает на поверхности воды, а не тонет. Галилей в 1611 году на торжественном обеде (в честь кардиналов Барберини и Гонзаго) у великого герцога Тосканского Козимо II экспериментально опроверг мнение коллег по Пизанскому университету, утверждавших, что это следствие формы льда, а не его относительной (к воде) легкости. Следствия этого диспута: трактат «Рассуждение о телах, пребывающих на поверхности воды в покое и тех, которые в ней движутся» и враги Галилея среди профессоров Пизы.

водство ртутных термометров.⁴ В 1724 году он предложил, во-первых, разделить диапазон между точками плавления и кипения воды на 180 частей, которые теперь называются градусами Фаренгейта ($^{\circ}\text{F}$), а во-вторых, считать температуру плавления равной 32°F . В 1732 году Реомюр предложил делить этот же диапазон на 80 частей, а астроном А.Цельсий в 1742 году – на 100 частей, причем его градусы уменьшались (!) с потеплением. Перевернуть эту шкалу предложил ботаник К.Линней в 1745 году. В России этот градусник долго называли шведским, а использовали термометр Л.Делиля с делением на 150 частей. Неясно, с чем связана буква С в традиционном обозначении градусов Цельсия: с фамилией шведского астронома или со словом centigrade (стоградусник).

Честь изобретения барометра в 1643 году принадлежит ученику Галилея – Э.Торричелли (и, возможно, их ученику В.Вивiani).

Силу и направление ветра научились измерять намного раньше – прибор мало отличался по конструк-

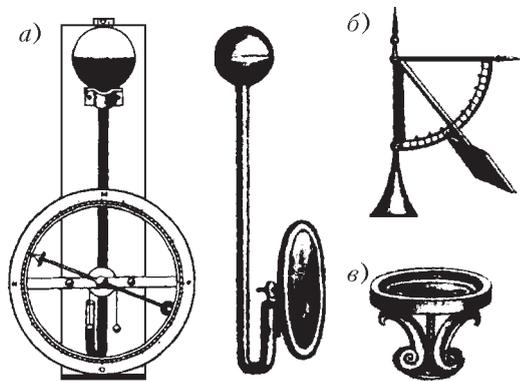


Рис.1. Метеорологические приборы, которые использовал Р.Гук в середине XVII века: барометр (а), анемометр (б) и компас (в) определяли давление, скорость и направление ветра как функции времени, разумеется если были часы. Для того чтобы разобраться в причинах и свойствах движения атмосферного воздуха, были нужны многочисленные и достаточно точные измерения, а следовательно, достаточно дешевые и точные приборы

ции от ветряной мельницы, а мельницы эти крутились в Европе со времен Крестовых походов. Однако еще в XVIII веке скорость ветра оценивали на глаз. В дневнике Петра I летом 1715 года сообщается: «6 июля. Ветр был о полудни средний, а к вечеру тише и ночью... 7 июля ветер был от зюд-оста зело тих и более 840 сажен не уходил в час».

Появление этих приборов (рис.1) позволило «вести летопись» давления и температуры, хотя практический смысл таких наблюдений вряд ли тогда был ясен. Разве

⁴ Неожиданное для Европы ограничение ртути обнаружилось во время Великой северной экспедиции. Казак П.Саломатов писал из Томска студенту С.Крашенинникову: «В данных мне инструментах барометров да термометров от тех великих мразов ртуть смерзается кусками, а в термометрах входит вся вниз из принадлежащих частей в яблоко. Однакож не в большие мразы опять попрежнему становится». Замерзание ртути снова было открыто Брауном и Ломоносовым в 1759 году, а затем Фризом зимой 1786–1787 годов в Великом Устюге.

что начальство могло в справочник посмотреть – узнать, где какие температуры в державе случаются и какие снега выпадают. Крестьянин справочники не читал – смотрел на небо лично. И Ломоносовская ода: «Наука легких метеоров, // Премены неба предвещай, // И бурный шум воздушных споров // Чрез верны знаки предъявляй, // Чтоб земледелец выбрал время, // Когда земле поверить семя // И дать когда покой браздам, // И чтобы, не боясь погоды, // С богатством дальны шли народы // К Елисаветиным брегам» – получила реальное подтверждение лишь пару веков спустя.⁵ А до той поры затраты «на воздух» приносили маловато доходу казне и производились со скрипом.⁶

В «Речи о пользе наук и художеств» в сентябре 1750 года С.Крашенинников (уже академик, а не студент) честно признал: «Смешно кажется, когда физик записывает перемену погод со всяким прилежанием, но ежели бы сыскалось правило, как ее наперед узнать, то, без сомнения, великой чести удостоилось для того, что перемена в самом здравии нашем немало от того зависит; знающему, что последует, можно от вреда поостеречься».

Однако постепенно заметили, что сильное падение давления предвещает пасмурную, дождливую погоду, возможно с сильным ветром. Капитаны кораблей, уцелевшие в штормах, старались выработать алгоритм поведения на основе изменения давления, а также силы и направления ветра. Алгоритм был громоздок. Глядя на простые современные карты погоды (в Интернете можно найти даже анимационные карты), которые может понять и школьник, трудно в эту сложность поверить. А тогда, если капитан пренебрегал правилами или если ими (весьма далекими от совершенства) пренебрегал шторм, плата была велика. Адмирал Нельсон ставил себе в заслугу не только победы в сражениях, но и умение маневрировать в шторм – не потерял ни одного корабля.

Раз от барометров обнаружилась польза, их появилось много. А дальше возникло естественное желание: сопоставлять показания не только в одной точке за разные моменты времени, но и одномоментные наблюдения в разных точках – составлять барические карты. Примерно в это время подрос со своими услугами

⁵ Сам Ломоносов и приборы метеорологические изготовлял, и регулярные измерения проводил. Без длительной подготовительной работы по совершенствованию приборов и техники измерений, по развитию физики, химии, различных технологий, математических методов и вычислительных алгоритмов современный прогресс в прогнозе погоды был бы невозможен. Но цари не желают ждать века – деньги хочется на войны и наряды потратить немедля.

⁶ Мысль о влиянии на погодные процессы и вообще на окружающую среду посещает начальственные головы регулярно – со времен строительства Вавилонской башни. Пока дело ограничивается загрязнением этой среды и воздействием на облака – с целью предотвращения градобития виноградников и улучшения погоды в отдельных мегаполисах. Впрочем, Ибн Хаукал сообщает со слов некоего путешественника о событиях в тогдашней столице Афганистана Зарандже. В 970 году там, вследствие ветра неслыханной силы и постоянства, была полностью занесена песком главная мечеть. Но некий человек за 20 тысяч дирхемов изменил направление ветра.

телеграф. Сначала в качестве правительственной связи, затем для военно-политической, административной, финансово-экономической информации. Потом дошла очередь и до метеорологии.⁷ Прогноз погоды был делом весьма сомнительным, и правительства предпочитали вкладывать деньги во что-нибудь более надежное, например в пушки. Однако и военным, и администраторам срочные метеосведения бывают нужны. Поэтому длительные обсуждения финансирования телеграфных затрат в шестидесятых-семидесятых годах XIX века были успешно завершены в большинстве стран Европы.

В США телеграфист, заступавший на смену, должен был послать об этом сообщение. Чтобы лишних средств не тратить, придумали: пусть вместо этого посылает информацию о давлении – барометр поставит ему на рабочий стол. К этому времени было ясно, что давление убывает с высотой. Чтобы сопоставлять давления в разных местах, а значит на разных высотах над уровнем моря, необходимо научиться приводить давление, измеренное на уровне поверхности, к общему уровню – уровню моря. Там, где была выполнена топографическая съемка (точность которой была тогда не слишком высока), можно было воспользоваться барометрической формулой Лапласа $\frac{dp}{dz} = -gp$. Ее можно дополнить уравнением Клапейрона $p = \frac{RpT}{M}$. Следствием из этих соотношений – уравнением гидростатики

$$p \frac{dz}{dp} = \frac{dz}{d \ln p} = -\frac{R}{Mg} T$$

– удобно пользоваться для экстраполяции до уровня моря, «под землю», поскольку изменение абсолютной температуры в правой части равенства составляет лишь несколько процентов.

Разумеется, экстраполяция «под землю», где никакого воздуха нет, штука условная. Но результаты получались сравнительно приличными. Вместе с нанесенными на карту ветрами это даже создавало возможность краткосрочного прогноза: предположим, что

⁷ Большой вклад в развитие метеорологических и магнитных измерений в Российской империи и в международное сотрудничество внес А.Я.Купфер, имевший разнообразные научные интересы, пользовавшийся большим авторитетом и у зарубежных коллег, и у российского начальства. В 1849 году была учреждена Главная физическая обсерватория (ГФО). Была развита наблюдательная метеорологическая сеть, составлены наставления по производству наблюдений, поверялись все измерительные приборы, производились инспекции сети. На основе собранных наблюдений издавались метеорологические сборники. Их посылали и наблюдателям, и зарубежным коллегам. Поэтому, когда вопрос о международном телеграфном обмене метеоданными стал реальным, было понятно, с кем именно нужно договариваться о таком обмене. Личные связи ученых играли заметную роль. Смерть Купфера в 1865 году замедлила (на несколько лет) затормозила развитие системы. Мешали и войны: Крымская, австро-прусская, австро-итальянская, франко-прусская, русско-турецкая, Гражданская война в США. Приглашенный из Швейцарии для руководства ГФО Г.И.Вильд сделал ее центром российской метеорологии и важным компонентом мирового метеорологического сообщества.



Рис.2. На знаменитой акварели К.Хокусаея «Охотники на снегу» ясно видно изменение ветра с высотой

ветер будет дуть так же, как и в данную минуту, тогда за сутки он принесет из пункта А в некий пункт В такое-то давление, которое сейчас имеется в точке А.

Гипотеза эта, как и рассуждение, имеет большую погрешность. Ветры переменчивы. И не только со временем, но и с высотой (рис.2). Достаточно сравнить направление движения гонимых ветром облаков с направлением ветра на уровне нашего носа – различаются.⁸ А на каких же высотах «переносится погода»? Оказывается, на всех, причем результат зависит и от скорости ветра (обычно растет с высотой), и от плотности воздуха (убывает). Следовательно, простым переносом того или иного метеорологического явления «по прямой» толковый прогноз погоды не сделаешь, а нужно измерять температуру, давление, влажность, скорость ветра не только около поверхности земли, но и на высотах. На каких высотах? На тех, где сосредоточена большая часть массы, импульса и энергии атмосферы.

Измерения в тропосфере и стратосфере

И вот Знайка стал думать. Думал он три дня и три ночи и придумал сделать шар из резины.

Н.Н.Носов. Приключения Незнайки и его друзей

Из школьного курса физики известно, что убывание давления и плотности воздуха с высотой близко к экспоненциальному (попробуйте с помощью приведенных выше формул приблизительно оценить показатель экспоненты). Определить среднюю скорость ветра на разных высотах на основе таких простых соображений не получается. Впрочем, сейчас, после века регулярных измерений, мы ее знаем довольно хорошо (рис.3).

Разумеется, поднимавшиеся на первых воздушных шарах люди могли взять с собой метеорологические приборы. Но сами воздушные шары были раритетами. Каждый день отправлять в полеты сотни таких шаров

⁸ Следовательно, при расчете переноса ветром различных примесей (например, выхлопных газов, результатов техногенных катастроф или пепла, выброшенного при извержении вулкана) необходимо знать, как распределится эта примесь по вертикали, на какой высоте она «склонна» пребывать.

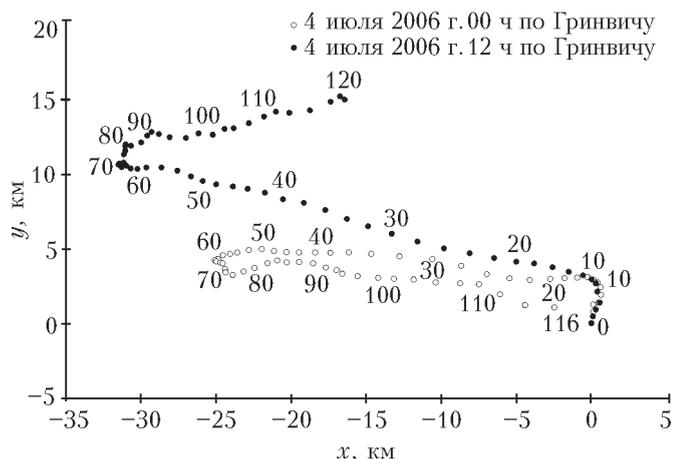


Рис.3. Скорость ветра, который дует на разных высотах, определяется наблюдателем по смещению зонда. На рисунке изображены положения двух зондов, запущенных с интервалом времени 12 часов, относительно точки запуска в километрах (направления осей — долгота и широта), а числа означают минуты полета. Видно, что на разных высотах ветер дует в разные стороны. За 12 часов, как следует из сравнения черных и белых кружков, направление ветра существенно поменялось

— ни у какой державы на это не хватило бы ни денег, ни пилотов. А если запускать воздушный шар поменьше и без людей? Изготовить автоматически работающие метеорологические приборы в девятнадцатом веке было бы сложно, но все же возможно. А сколько времени понадобится, чтобы этот самый зонд потом найти?! Информация (если мы хотим использовать ее для прогноза, скажем, на сутки) уже устаревает. Можно использовать воздушных змеев — но нужен большой (а значит, сложный и дорогой) змей, чтобы мог поднять приборы. Да и не при всяком ветре он полетит. И не слишком высоко его можно запустить.⁹

Ситуация улучшилась с изобретением радио и прогрессом в радиотехнике. Передатчик уменьшался в размерах и весе — уменьшались и сами метеоприборы. К тридцатым годам прошлого века такой измерительно-передающий комплекс, достаточно надежный и недорогой, чтобы его использовать для сравнительно массовых измерений, был изготовлен в разных странах. Затем последовала вторая мировая война. Военные аспекты метеорологии вышли на первый план. Информация стала секретной, и об ее свободном обмене речь уже не шла. Прилагались огромные усилия, чтобы засекретить свою погоду и узнать погоду на территории противника. Эпизоды этой смертельной борьбы описаны в книге З.М.Каневского «Цена прогноза» (Л.: Гидрометеиздат, 1976). В борьбе участвовали подводные лодки и большие надводные корабли, разведывательные группы и самолеты. Один из руководителей разведки Третьего рейха В.Шелленберг в своих мемуарах пишет,

⁹ В России такие запуски регулярно проводились под Москвой в Кузино (поместье Д.А.Рябушинского), где под руководством Н.Е.Жуковского был организован аэродинамический институт, а при нем аэрологическая обсерватория. Владелец поместья в работе принимал участие, и не только финансовое. Современный рекорд подъема змея составляет 9740 м.

что в дни, предшествовавшие немецкой оккупации Норвегии, основная секретная информация немецких агентов была метеорологической.

Последовавшая «холодная война» обмен информации также не способствовала. Архивы сохранили, например, докладную записку управляющего делами ЦК ВКП(б) Д.В.Крупина секретарю ЦК ВКП(б) М.А.Суслову от 7.4.1948 о разглашении важных в военном отношении сведений в книге «Климатические области и районы СССР».¹⁰ Справка замначальника Генштаба подтверждала: да, действительно, имело место разглашение потенциальному противнику важных сведений, особенно про Советскую Арктику. Дело тогда закончилось тихо: автора — профессора Б.П.Алисова — даже не посадили, книгу, правда, пустили под нож... А данные о климате наших северных морей и сейчас, спустя шестьдесят с лишним лет, содержат лакуны. Однако в те же годы появилась Всемирная метеорологическая организация — агентство ООН по метеорологии. И результаты ее работы не стыдно предъявить человечеству.

В настоящее время основным источником информации для Гидрометцентра России являются поступающие два раза в сутки (или чаще) телеграммы, их сейчас около 6500 за каждое поступление, характеризующие состояние атмосферы у земной поверхности.¹¹ Это так называемые синоптические¹² данные, из которых около 2000 приходят с морских буев¹³ и с морских судов. К ним добавляются примерно 650 аэрологических теле-

¹⁰ Организатор и первый руководитель Единой гидрометеорологической службы СССР А.Ф.Вангенгейм в 1934 году был послан в Соловки, а в 1937 году расстрелян (реабилитирован в 1956 г.). Вообще, повышенный интерес российских правоохранительных органов к метеорологии имеет давнюю традицию. Первые метеонаблюдения стали записывать по указу Алексея Михайловича в 1650 году. Поручено это было Приказу тайных дел.

¹¹ Автоматические метеостанции используются в малонаселенных районах, где трудно найти наблюдателей. Их применение ограничено досадной склонностью некоторых людей ломать найденную аппаратуру. При производстве таких станций нужно обеспечивать их максимальной маскировкой.

¹² В переводе с греческого ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ означает «способный видеть все», однако радиозонды, радары и спутники много добавляют к этому «все». Времена меняются, и технологии меняются вместе с ними.

¹³ Здесь речь идет о буях, которые плавают на поверхности океана и передают информацию с границы двух сред: воздуха и воды. В последние несколько лет появилась сеть глубоководных буев (так называемая система ARGO) — настоящее чудо современной техники. Такой буй дрейфует на заданной ему глубине под водой. Раз в 10 суток включается программа, согласно которой он меняет свою общую плотность и начинает двигаться по вертикали, проходя глубины от 2 км до поверхности и измеряя температуру и соленость воды с частотой в несколько метров. Оказавшись на поверхности, буй передает накопленную информацию на спутник, причем передает несколько раз, чтобы избежать случайной потери информации. Через несколько часов он погружается на свою штатную глубину. Таких буев сейчас более 3 тысяч, и они довольно равномерно покрывают Мировой океан за исключением полярных морей. Обычно на температуру воздуха непосредственно влияет только температура поверхности воды, но в сильный шторм происходит перемешивание приповерхностных слоев воды, которые включаются в теплообмен.

грамм, приходящих с тех метеорологических станций, на которых осуществляются запуски радиозондов. Аэрологическая информация, если пользоваться метеорологическим жаргоном, «освещает» атмосферу над планетой – радиозонд долетает и сообщает сведения о метеорологических полях до высоты 30 км и более.

Измерения, которые производит радиозонд в полете, часто приписывают одному моменту времени – его называют стандартным сроком наблюдения. Имеется международная договоренность, какие сроки считать стандартными, чтобы эти измерения во всех странах производить одновременно (мы обсудим ниже, почему такая одновременность удобна для расчетов). Однако зонд поднимается на максимальную высоту отнюдь не мгновенно – обычно это занимает около полутора часов.¹⁴ Следовательно, пренебрежение этим временем приводит к ошибке в интерпретации измерений. Для того чтобы оценить эту погрешность, нужно умножить характерную производную $\partial_t f$ измеряемой величины f (температуры, давления, влажности, ветра) по времени t на $\Delta t \approx 1,5$ часа. В грубой модели такой ошибкой $\delta_f = \Delta t \cdot \partial_t f$ можно пренебречь, а в хорошей современной модели лучше произвести надлежащие поправки. Стоит учесть и нарастающее со временем подъема смещение зонда по горизонтали.

Южное полушарие Земли «освещено» данными значительно хуже, чем северное. Многие метеорологические центры, расположенные далеко к северу от экватора, когда-то не принимали во внимание этот плохо «освещенный» район и ограничивали область своего прогноза северным полушарием, а иногда и его частью. Другой причиной такого ограничения была недостаточная производительность компьютера. Конечно, атмосферные процессы, происходящие в южном полушарии, влияют на состояние атмосферы в северном, и такое вынужденное ограничение приводит к появлению ошибки, возрастающей со временем и распространяющейся от экватора к северу. «Смягчающим вину обстоятельством» служили сравнительно небольшие значения меридиональной¹⁵ составляющей ветра.

Синоптические и особенно аэрологические данные «освещают» северное (и тем более южное) полушарие неравномерно. Более половины его площади занимает океан, а радиозонды там запускают лишь несколько островных метеорологических станций и несколько судов погоды, стоящих на якорях. Наиболее густая сеть станций – в Европе, Восточной Азии и Северной Америке. Предположим, что все 650 аэрологических станций находятся в северном полушарии и распределены равномерно, и оценим густоту такой сети. Радиус Земли $R_3 \approx 6400$ км, площадь поверхности северного

¹⁴ Вот почему во многих странах запуск начинают за 30 минут до синоптического срока – чтобы в соответствующий стандартный момент времени зонд был поближе к середине траектории.

¹⁵ Иными словами, проекции вектора скорости ветра в данной точке на меридиан, проходящий через эту точку в экваториальной зоне: полушария как бы разделены марлевой занавеской, которую из-за недостаточной мощности компьютера и ограниченности исходной информации вынужденно представляли каменной стеной.



Рис.4. Левая граница дождя очерчена четко. Для оценки масштаба можно использовать шоссе. Граница дождя изогнута – это следствие геометрии воздушных потоков в зоне. Кроме того, они и по горизонтали закручены. Описать явления вокруг одного облака (с горизонтальным размером в несколько километров) в глобальной модели атмосферы Земли затруднительно

полушария $S_N = 2\pi R_3^2 \approx 2,6 \cdot 10^8$ км². Таким образом, одна аэрологическая станция приходится в среднем на площадь $S_1 \approx S_N/650 \approx 4 \cdot 10^5$ км². Такую площадь имеет квадрат со стороной, равной расстоянию от Москвы до Санкт-Петербурга (~ 600 км). Если вместо аэрологической сети рассмотреть синоптическую, то сторона квадрата уменьшится примерно до 300 км.

Эта оценка дает примерное представление о минимальном горизонтальном масштабе тех явлений, которые мы имеем шансы предсказать. Действительно, прежде чем вычислять эволюцию метеорологических полей, мы уже должны предположить, что в начальный момент времени значения метеорологических элементов в Бологом суть средние арифметические значения этих же элементов в Москве и Санкт-Петербурге. Предположение грубоватое, особенно если учесть, что выпадение дождя в одном районе Москвы может наблюдаться при ясной погоде в другом, так что резкую границу выпадения дождя иногда можно увидеть даже на асфальте (рис.4).

Из нашей оценки также следует, что для прогноза с мелким шагом порядка 10 км необходимо количество метеорологических станций увеличить примерно в тысячу раз, что нереально с экономической точки зрения. Прогресс возможен лишь при переходе к качественно иным методам измерений: например, если будет найден метод повышения точности и расширения области зондирования радаров, с помощью которых в настоящее время производят измерения в районе аэропортов, или метод повышения точности и разрешающей способности метеорологических спутников (рис. 5, 6).

В ближайшее время растущая точность¹⁶ спутников, видимо, сравняется с точностью метеозондов, и это

¹⁶ Увеличивается количество частот, на которых спутник измеряет уходящее в космос излучение атмосферы, улучшаются вычислительные алгоритмы решения так называемой обратной задачи: определения профиля температуры $T(z)$ по измеренному распределению излучаемой энергии по частотам.

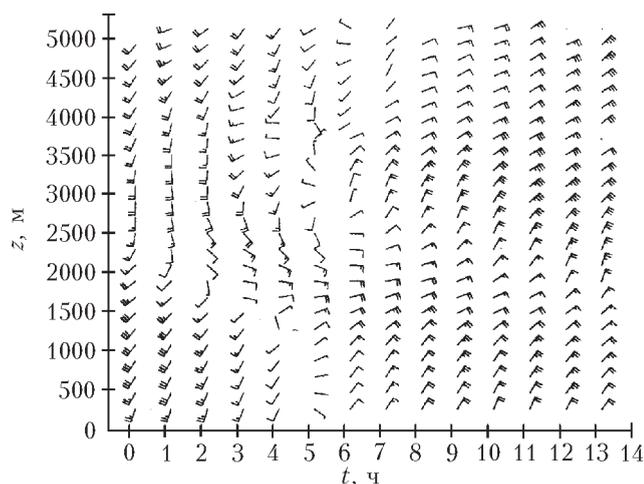


Рис.5. Профайлеры, измеряющие ветер одновременно на всех (до высоты в несколько километров) высотах, эксплуатируются сравнительно недавно. Это оборудование дорогое, но зато каждое отдельное измерение стоит намного дешевле, чем запуск радиозонда. На рисунке видно, как происходит изменение направления ветра со временем — на разных высотах отнюдь не одновременно. Типичный угол наклона фронта порядка 1° . Направление стрелки указывает направление ветра. Если она смотрит вверх, то ветер южный, а если направо — западный. Оперение описывает силу ветра. Длинное перо отвечает скорости 5 м/с, а короткое — вдвое меньшей

изменение количества информации, в свою очередь, существенно повлияет и уже влияет сейчас на методы усвоения оперативной метеорологической информации (т.е. регулярно поступающей в установленное время суток и в установленной форме).

А если отказаться от равномерного распределения метеорологических станций? Расположим десяток их в районе Москвы, и уж тогда для Москвы дадим точный прогноз. Не получится. Сами уравнения, описывающие динамику атмосферы, позволяют оценить скорость распространения влияния из одной точки в другую — около 300 м/с. Да и скорость ветра в 50 м/с на высоте нескольких километров вполне обыкновенна. Даже если ориентироваться на эту меньшую скорость, нужно признать, что за час частицы воздуха могут преодолеть 180 км. Следовательно, даже при прогнозе на одни сутки ареал влияния на погоду в Москве значительно превосходит Московскую область, и поэтому необходимо иметь информацию извне области. Так что при прогнозе погоды более чем на сутки даже в такой большой стране, как Россия, необходимы данные из-за границы.

Уже упоминалось, что прогноз в Гидрометцентре России считают один-два раза в сутки (для усвоения данных считают на небольшой срок, но зато чаще: четыре раза в сутки). При этом нужно либо вовсе отказываться от результатов измерений, производимых не в то время (не в основные сроки измерений), либо слабо учитывать эти данные, причем тем слабее, чем больше различаются срок измерения $t_{изм}$ и основной срок наблюдения t_0 , начиная с которого мы

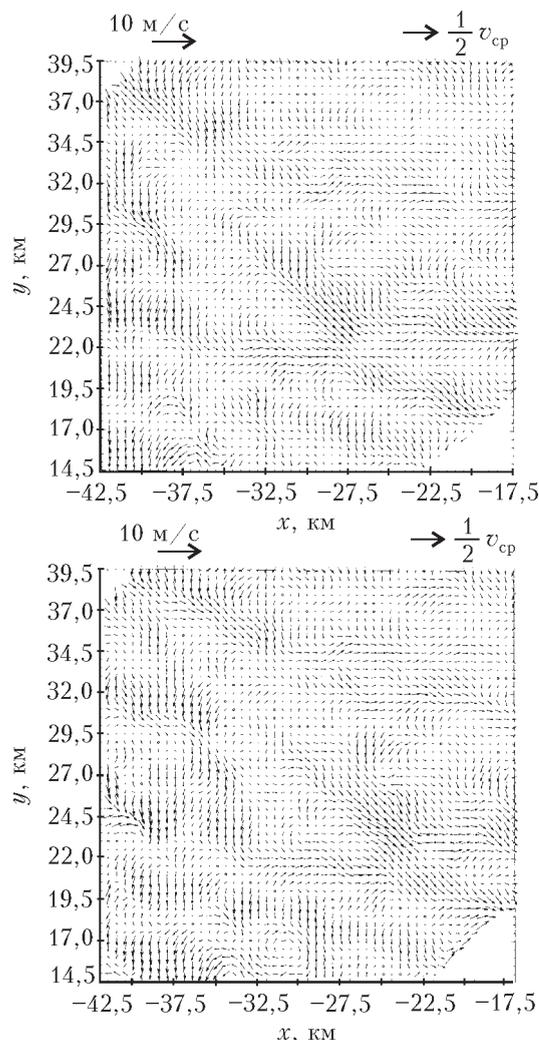


Рис.6. Можно попытаться разделить средний ветер и ветер локальный. На верхнем квадрате 25×25 км с разрешением 0,5 км приведено поле отклонения ветра от среднего по этому же квадрату на высоте 1 км (где уже на ветер слабо влияют особенности земной орографии, дома и т.п.). Измерения проводились совместно двумя радарами в Оклахоме в 14 ч 38 мин по Гринвичу 27 июля 1977 года. Вектор среднего потока (точнее, $1/2 v_{cp}$) приведен в верхнем правом углу и составляет 14,8 м/с. Видно, что отклонения меньше среднего потока на порядок (но не более!). И у них есть своя повторяющаяся структура — вихри с характерным размером 4 км. На нижнем рисунке приведены измерения ветра, проведенные при тех же условиях, что и на верхнем, но спустя примерно 3,5 мин. Средний ветер практически не изменился, а мелкомасштабная структура отклонений от него изменилась. Основное изменение (хотя не все сводится к нему) — перенос вдоль основного потока в восточном направлении. Можно оценить, что вся начальная картинка «уйдет» из рассматриваемого квадрата примерно за 28 мин — для посадки или взлета самолета вполне достаточно

считаем прогноз.¹⁷ При такой организации отказываться приходится от большого объема информации

¹⁷ Фактически прогноз начинается через несколько часов после t_0 : данные измерений в закодированном (для прохождения по каналам) виде поступают в компьютер, где раскодируются по специальной программе. Так что сначала прогноз, вычисленный компьютером, догоняет реальное время, а потом обгоняет.

(напомним, что некоторые метеорологические станции запускают зонды четыре раза в сутки, а спутники производят измерения практически непрерывно).

Для того чтобы использовать эту асинхронную информацию, можно применять следующую процедуру. Стартуя с момента t_0 , дать прогноз на небольшой срок δt , затем, используя полученный результат в качестве первого приближения, «подкачать» данные, относящиеся к интервалу времени $(t_0, t_0 + \delta t)$, потом уточненный прогноз на момент $t_0 + \delta t$ использовать как начальное условие для прогноза на период $(t_0 + \delta t, t_0 + 2\delta t)$ и т.д. Поскольку для практики нужен прогноз погоды с заблаговременностью $T \gg \delta t$, то время от времени нужно считать и прогноз на срок T , но при этом в начальные данные для такого прогноза входят и более ранние данные из интервала $(t_0 - k\delta t, t_0)$, где k – число «подкачек» информации. Мы как бы делаем прыжок с непрерывно движущейся ленты эскалатора, а не с неподвижной Земли. После того как посчитан новый прогноз, можно уже его использовать в качестве первого приближения и вводить поправки, чтобы следующий прогноз был еще ближе к наблюдениям. Разумеется, для реализации такой весьма непростой процедуры «непрерывного», его еще называют четырехмерным, усвоения данных нужно производить большее количество вычислений, чем для решения динамической задачи с фиксированным начальным полем, а следовательно, иметь более мощный компьютер.

Другой вариант усвоения называется вариационным. Всевозможные поля температуры, давления, влажности и ветра в атмосфере, т.е. несколько функций трехмерного аргумента, образуют бесконечномерное про-

странство. Динамика погоды – траектория в этом пространстве. И ее оценка составляет задачу прогноза погоды. Реальный компьютер имеет ограниченные память и быстродействие и не может рассчитывать динамику системы с бесконечным числом степеней свободы. Современные дискретные модели прогноза погоды имеют число степеней свободы в диапазоне $N = 10^7 - 10^8$. Вместо расчета «истинной траектории» строят ломаную с шагом в несколько минут. Для модели нужна стартовая точка в этом N -мерном пространстве. Измерение несет информацию об одной из координат траектории в N -мерном пространстве в момент измерения. Если всего за период усвоения единиц информации больше N (а на практике так и происходит), то траектории, в точности соответствующей всем измерениям, не существует. Сама модель приближенная, да и измерения производятся с какими-то погрешностями.

Переформулируем постановку задачи: найдем такую траекторию, что сумма квадратов отклонений траектории от измеренных значений будет минимальна. Самый простой аналог такой задачи (решаемый методом наименьших квадратов) – когда на плоскости имеется m точек и требуется провести прямую так, чтобы сумма квадратов m отклонений точек от прямой была минимальной. Наша задача имеет три отличия: все происходит не на двумерной плоскости, а в N -мерном пространстве; траектории не прямые, а весьма сложные кривые; мы знаем не полностью точки, а лишь некоторые их координаты.

(Продолжение следует)

НАША ОБЛОЖКА

Что такое пена?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

Почему жидкая пена белая? Хаотично ориентированные пузырьки отражают падающий свет в разные стороны, т.е. рассеивают его. А тонкая пленка любой жидкости (шампуни, газированные напитки и т.п.), окружающая газовые пузырьки, практически бесцветна на просвет и почти не влияет на цвет пены. Поэтому цвет у пены самых различных жидкостей один и тот же – цвет падающего на нее света. Чтобы увидеть пену, например, красного цвета, достаточно поднести ночью стакан с пеной к красному фонарю стоп-сигнала автомобиля. А чтобы увидеть черную пену, можно поместить ее на черную бумагу и осветить пучком параллельных лучей света, например прошедшего через узкую щель. Если посмотреть на освещенную пену через увеличительное стекло, то она будет казаться черной за исключением нескольких ячеек, дающих блики в сторону наблюдателя.

Пена на земле и в космосе. Природные материалы часто имеют структуру пены. Это дерево, пробка, губка или кораллы. Многие искусственные материалы тоже похожи на пену – например, взбитые сливки, хлеб, пенопласт, монтажная пена. Пену можно изготовить и из расплавленного металла, пропуская через него пузырьки газа. Охлаждаясь, металлическая пена превращается в твердое пористое тело,

свойства которого зависят от процентного содержания газа в пене. Например, плотность алюминиевой пены, содержащей 94% воздуха (по объему), в 6 раз меньше плотности воды, а теплопроводность в 100 раз меньше, чем у обычного алюминия. Изменяя процентное содержание воздуха, можно получать пену с различными физическими свойствами.

Изготовление материалов с заданными свойствами открывает широкие возможности в биомедицине. Так, при лечении переломов часто используют имплантанты – искусственные элементы, заменяющие утраченные части кости. Однако если модули Юнга кости и имплантанта различаются, то последний в конце концов просто отторгается. А вот твердая пена из титана с модулем упругости, равным модулю упругости костной ткани, представляет собой идеальный материал для имплантанта в данном случае.

Получить стабильную жидкую пену с одинаковыми характеристиками по всему объему образца мешает гравитация. Со временем мелкие газовые пузырьки сливаются в крупные, а жидкость скапливается внизу сосуда. Этот процесс называют старением пены. Если старение пены происходит быстро, то изучать ее очень сложно. Поэтому лучше всего исследовать пенообразование в невесомости. Эта тема действительно включена в научную программу межпланетных космических станций.

К. Богданов



О сумме телесных углов многогранника

И. БОГДАНОВ

ИЗ КУРСА ГЕОМЕТРИИ ИЗВЕСТНО, ЧТО СУММА углов любого треугольника равна π . Более того, этот результат легко обобщается на выпуклые¹ многоугольники: сумма углов любого выпуклого n -угольника равна $(n-2)\pi$.

Точным пространственным аналогом угла многоугольника является *телесный угол* многогранника. Возникает естественный вопрос – а что можно сказать про сумму всех телесных углов выпуклого многогранника? Ответу (в некотором смысле) на этот вопрос и посвящена данная заметка. В частности, мы дадим решение задачи М2153 «Задачника «Кванта». Ее формулировка такова.

М2153. Сумма телесных углов при вершинах выпуклого многогранника равна π . Докажите, что существует замкнутый маршрут по его ребрам, проходящий через каждую его вершину ровно один раз.

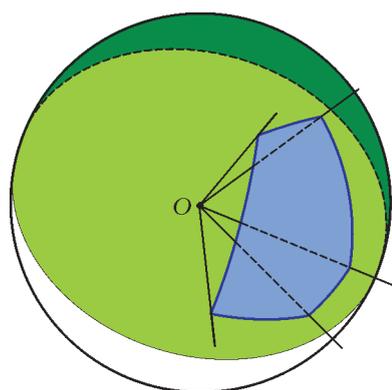


Рис. 1

называется величиной телесного угла (или просто телесным углом) данного угла P (рис.1).

Ясно, что это определение является точным аналогом величины обычного угла на плоскости (рис.2). Сумму всех телесных углов выпуклого многогранника K мы будем в дальнейшем обозначать через $\Sigma(K)$. Мы будем пользоваться тем, что площадь единичной сферы равна 4π .

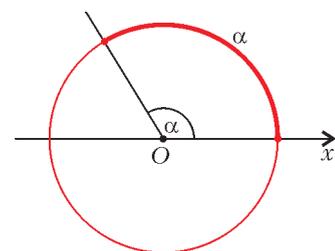


Рис. 2

Прежде чем оценивать сумму телесных углов многогранника, полезно

¹ И даже на невыпуклые, но уже чуть посложнее; см. по этому поводу [1, задача 8].

для начала разобраться, а какие значения может вообще принимать телесный угол. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. Телесный угол выпуклого многогранного угла P может принимать все значения из интервала $(0; 2\pi)$, и только их.

Доказательство. Мы докажем, что для выпуклого многогранного угла P существует плоскость γ , пересекающая его только по вершине. Это будет означать, что P лежит по одну сторону от этой плоскости. Тогда часть сферы, попавшей внутрь P , будет находиться в одной полусфере, ограниченной плоскостью γ ; значит, ее площадь будет меньше площади этой полусферы, т.е. 2π (см. рис.1).

Пересечем наш многогранный угол произвольной плоскостью α ; в сечении получится выпуклый (плоский) угол. Значит, в плоскости α найдется прямая k , пересекающая P только по вершине (рис.3).

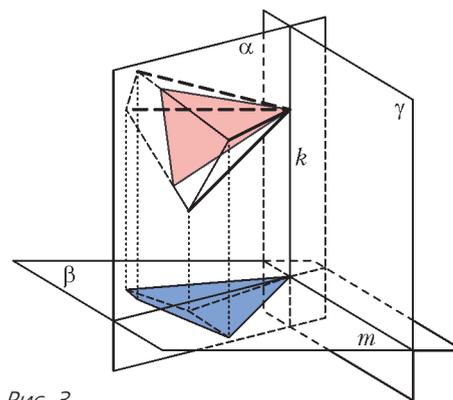


Рис. 3

Спроектируем наш многогранный угол на плоскость β , перпендикулярную k . Нетрудно понять, что в проекции получится также выпуклый угол (иначе бы k пересекала P по лучу). Значит, в плоскости β можно найти прямую m , пересекающую проекцию ровно по вершине. Тогда плоскость γ , проходящая через прямые k и m , – искомая.

Осталось доказать, что телесный угол может принимать все значения между 0 и 2π . Пусть плоскость γ , проходящая через центр

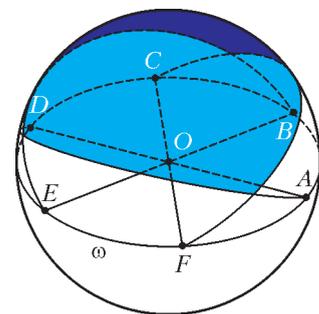


Рис. 4

сферы, пересекает ее по окружности ω . Впишем в эту окружность правильный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть плоскости $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ получаются из γ поворотами на угол Φ относительно прямых AD, BE и CF (рис.4). Тогда эти плоскости образуют выпуклый трехгранный угол P_Φ . Нетрудно видеть при этом, что, когда Φ достаточно мал, телесный угол трехгранного угла P_Φ близок к 2π , а когда Φ приближается к $\pi/2$, этот телесный угол становится сколь угодно малым.

Тетраэдр

Как и в плоскости, удобно начать с рассмотрения самого простого случая. В пространстве самым «простым» многогранником является треугольная пирамида, или тетраэдр.

Попытавшись построить несколько примеров (сделайте это!), нетрудно понять, что сумма телесных углов тетраэдра постоянной не является. Действительно, рассмотрим треугольник ABC и точку D' в его плоскости. Построим тетраэдр $ABCD$ такой, что $DD' \perp (ABC)$, и расстояние DD' очень маленькое.

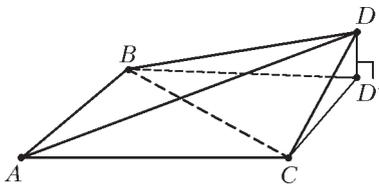


Рис. 5

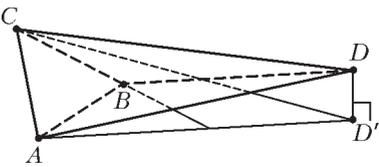


Рис. 6

Тогда нетрудно видеть, что если точки A, B, C, D' образуют выпуклый четырехугольник, то все телесные углы тетраэдра $ABCD$ довольно малы (рис.5). Если же, скажем, точка B попадает внутрь треугольника ACD' (рис.6), то телесный угол при вершине B может быть очень большим: как мы уже видели, соответствующий трех-

гранный угол может высекать почти половину соответствующей сферы.

Итак, интересующая нас сумма уже может быть близка к нулю или к 2π . Следующий естественно возникающий вопрос – а насколько большой может оказаться эта сумма? Попробуем ее оценить.

Рассмотрим тетраэдр $ABCD$. Для того чтобы оценить величину $\Sigma(ABCD)$, удобно все его трехгранные углы снести в одну точку O и посмотреть, что они будут высекать на единичной сфере Ω с центром O . Пусть при этом лучи AB, AC, BC трехгранного угла с вершиной A перешли в лучи OB_A, OC_A, OD_A (точки B_A, C_A, D_A лежат на Ω); аналогично определим остальные точки (рис.7). Поскольку лучи AB и BA противоположно направлены, точки B_A и A_B будут противоположными точками сферы; то же можно сказать про остальные аналогичные пары точек.

Проведем через O плоскости S_A, S_B, S_C, S_D , параллельные граням BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Лучи, соединяющие O с точками $B_C, B_D, C_B, C_D, D_B, D_C$, параллельны плоскости BCD ; значит, все эти точки лежат в плоскости S_A . Проводя аналогичные рассуждения для остальных плоскостей,

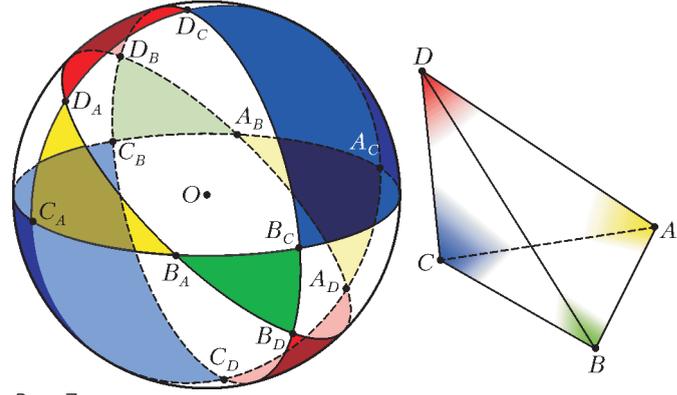


Рис. 7

получаем, что точки B_A и A_B лежат в пересечении плоскостей S_C и S_D ; аналогично для других точек.

Теперь осталось на нашем рисунке найти требуемую величину $\Sigma(ABCD)$. Величины телесных углов тетраэдра – это площади сферических треугольников $B_A C_A D_A, A_B C_B D_B, A_C B_C D_C, A_D B_D C_D$. Заметим, что эти треугольники не пересекаются. Более того, они не пересекаются также с треугольниками, симметричными им относительно O (это, соответственно, треугольники $A_B A_C A_D, B_A B_C B_D, C_A C_B C_D, D_A D_B D_C$)! Значит, сумма площадей этих 8 треугольников не больше площади сферы, т.е.

$$\Sigma(ABCD) \leq 4\pi/2 = 2\pi. \tag{1}$$

При этом видно, что остались непокрытыми несколько сферических четырехугольников (таких, как $B_A B_C D_C D_A$ на рисунке 7). Значит, в неравенстве (1) знак можно заменить на строгий. С другой стороны, мы видели, что $\Sigma(ABCD)$ может оказаться сколь угодно близкой как к 0, так и к 2π . Однако для любых двух тетраэдров мы можем непрерывно «продеформировать» один из них так, чтобы получить тетраэдр, равный другому. При этом $\Sigma(ABCD)$ будет меняться непрерывно; значит, она может принимать все значения из промежутка $(0; 2\pi)$.

Тем самым, доказана такая теорема.

Теорема 2. Для любого тетраэдра $ABCD$ мы имеем $0 < \Sigma(ABCD) < 2\pi$; при этом для любого $\alpha \in (0; 2\pi)$ существует тетраэдр $ABCD$, для которого $\Sigma(ABCD) = \alpha$.

Задача 1. В тетраэдре $ABCD$ известна величина $\Sigma(ABCD)$. Чему равна сумма двугранных углов при его ребрах?

Проблемы

Итак, с тетраэдром мы вроде бы разобрались. Однако при попытке перенести предыдущее рассуждение на произвольный многогранник нас ожидают некоторые проблемы. Одну из них мы решим на месте, для решения же остальных потребуется взглянуть на наше доказательство несколько с другой стороны.

Проблема 1. Чтобы двигаться дальше, прежде всего надо сформулировать, а чего же мы хотим. В плоском случае вопрос о сумме углов ставился отдельно для выпуклых многоугольников с n сторонами – все такие многоугольники в некотором смысле «похожи» друг на

друга. Однако какими же параметрами задавать многогранник? Количеством вершин, ребер, граней?

На рисунках 8 и 9 изображены два многогранника с 8 вершинами, 12 ребрами и 6 гранями; однако вряд ли кто-то скажет, что они «похожи»: например, у одного есть пятиугольные грани, а у

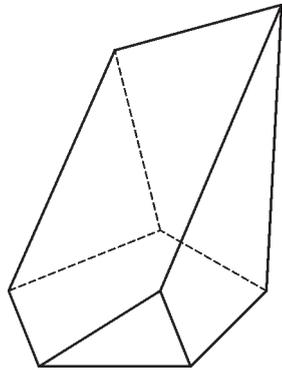


Рис. 8

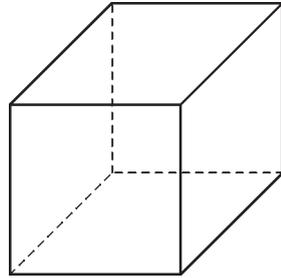


Рис. 9

другого их нет. Таким образом, нужно ввести более сильное понятие «похожести» многогранников. Таким понятием является комбинаторный тип.

Определение 2. Будем говорить, что многогранники K и L имеют одинаковый комбинаторный тип, если у них одинаковое количество вершин и их можно занумеровать (вершины многогранника K – A_1, \dots, A_n , а вершины многогранника L – B_1, B_2, \dots, B_n) так, чтобы

а) вершины A_i, A_j были соединены ребром в K тогда и только тогда, когда вершины B_i, B_j соединены ребром в L ;

б) более того, вершины A_i, \dots, A_m образуют (именно в этом порядке) грань многогранника K тогда и только тогда, когда вершины B_i, \dots, B_m образуют (именно в этом порядке) грань многогранника L .

В этом смысле многогранники на рисунках 8 и 9 имеют разный комбинаторный тип, а многогранники на рисунках 9 и 10 – одинаковый. Вопрос же, на который мы хотим ответить, таков.

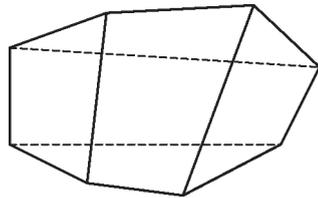


Рис. 10

легко разрезать на треугольники так, что все их вершины будут являться вершинами исходного многоугольника (рис.11); при этом в каждом таком разрезании будет ровно $n - 2$ треугольника. Понятно, что если сложить все суммы углов треугольников разбиения, то получится сумма углов исходного многоугольника, откуда и следует формула для суммы его углов.

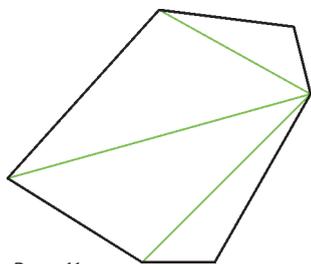


Рис. 11

Вопрос. Для данного комбинаторного типа многогранника определить, в каких пределах может изменяться сумма его телесных углов.

Проблема 2. Произвольный выпуклый n -угольник легко разрезать на треугольники так, что все их вершины будут являться вершинами исходного многоугольника (рис.11); при этом в каждом таком разрезании будет ровно $n - 2$ треугольника. Понятно, что если сложить все суммы углов треугольников разбиения, то получится сумма углов исходного многоугольника, откуда и следует формула для суммы его углов.

Можно попробовать применить тот же подход и к выпуклому многограннику. Однако один и тот же многогранник можно разрезать на разное количество тетраэдров! Например, если рассмотреть объединение двух n -угольных пирамид $SA_1A_2 \dots A_n$ и $TA_1A_2 \dots A_n$ с общим основанием, то его можно разрезать как на n тетраэдров $STA_1A_2, STA_2A_3, \dots, STA_nA_1$, так и на $2(n - 2)$ тетраэдра: сначала – плоскостью основания – на две пирамиды, а затем каждую пирамиду на $n - 2$ тетраэдра (рис.12). Для произвольного же многогранника непонятно даже, на какое минимальное число тетраэдров его вообще можно разрезать.

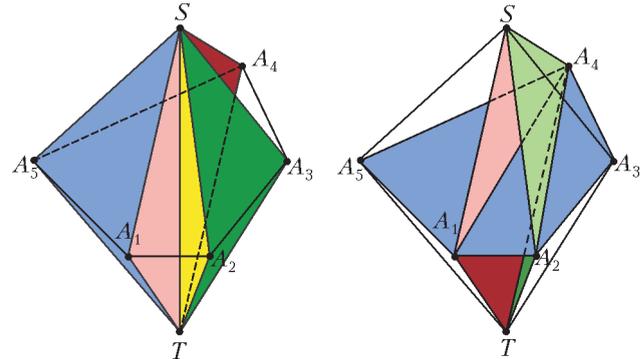


Рис. 12

Проблема 3. Даже если удастся разрезать многогранник K на несколько тетраэдров – это может дать только оценку сверху на $\Sigma(K)$ (а именно, если число тетраэдров равно d , то $\Sigma(K) < 2\pi d$). Для оценки с другой стороны ничего лучше, чем $\Sigma(K) > 0$, мы таким путем не получим. В то же время не очень ясно, правда ли, что для любого комбинаторного типа можно придумать многогранник такого типа со сколь угодно малой суммой телесных углов.²

Проблема 4. Наконец, можно попробовать другой подход: не резать многогранник на тетраэдры, а попытаться повторить рассуждения из предыдущего раздела напрямую. Именно, надо совместить вершины всех многогранных углов и посмотреть, какой рисунок получится на сфере.

Однако и этот подход сопряжен с трудностями. В случае тетраэдра, как мы видели, соответствующие сферические треугольники не перекрывались (поэтому сумма телесных углов была не больше 4π) – и даже не перекрывались с симметричными им (а значит, оценка усиливалась до 2π). Однако даже для тетраэдра осознание того, что рисунок будет всегда выглядеть именно так, как на рисунке 7, требует некоторого стереометрического воображения. Его может не хватить уже для рассмотрения n -угольной пирамиды (попробуйте!); в случае же произвольного многогранника общая картина совершенно ускользает.

Кроме того, понятно, что для достаточно сложных многогранников (например, для n -угольной призмы) сумма телесных углов может быть гораздо больше 4π ; это значит, что соответствующие области на сфере

² Мы вскоре выясним, что это неправда.

будут перекрываться. В этом случае, видимо, для оценки величины $\Sigma(K)$ требуется понять количество слоев, в которое они покрывают сферу. Как его оценить?

Именно этой оценкой мы и займемся в следующем разделе. Для этого нам придется изобрести несколько другой подход к задаче.

Проекции

Итак, рассмотрим выпуклый многогранник M и сферу единичного радиуса с центром O . Проведем через O плоскости, параллельные граням многогранника; они разделят сферу на несколько частей K_1, \dots, K_s (заметим, что для каждой части найдется часть, симметричная ей относительно O). Теперь, если мы опять же снесем многогранный угол при некоторой вершине A многогранника в точку O (получив некоторый угол S'_A), то часть сферы, попавшая внутрь него, будет объединением нескольких из частей K_i (поскольку ее граница лежит в наших плоскостях). Отметим эти части, а также части, симметричные им относительно O (т.е. попавшие в центрально симметричный угол S'_A), — мы уже видели, что это полезно; окажется это полезным и в дальнейшем.

Проделаем такую операцию с каждой вершиной многогранника. Теперь для каждой части разбиения K_i посчитаем количество t_i раз, которое мы ее отмечаем. Иначе говоря, t_i — это количество многогранных углов, в которые попала она или симметричная ей часть сферы; это количество, вообще говоря, может быть любым неотрицательным целым числом.

Теперь ясно, что сумма всех телесных углов при вершинах многогранника будет равна

$$\Sigma(M) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s t_i S(K_i), \quad (2)$$

где $S(K_i)$ — это площадь части K_i (множитель $\frac{1}{2}$ появился из-за того, что каждый телесный угол мы посчитали дважды). Наша ближайшая цель — описать числа t_i в других терминах.

Рассмотрим точку T , лежащую строго внутри части K_i . Заметим, что прямая OT не параллельна ни одной грани многогранника M (иначе T лежала бы на границе части). Проведем плоскость α , перпендикулярную OT (мы будем считать, что α горизонтальна), и спроектируем наш многогранник на плоскость α ; в проекции получится выпуклый многоугольник N . Мы будем обозначать через $\pi(X)$ проекцию произвольной точки X .

Рассмотрим произвольную вершину A нашего многогранника и выясним, где будет лежать точка $\pi(A)$. Пусть a — прямая, проходящая через A перпендикулярно α (иными словами, $a \parallel OT$). Эта прямая пересекается с M либо по некоторому отрезку (и тогда A является одним из его концов), либо только по точке A . Рассмотрим оба этих случая.

Случай 1 (рис.13). Пусть прямая пересекается с многогранником по отрезку AB . Тогда внутренние точки этого отрезка также будут являться внутренними

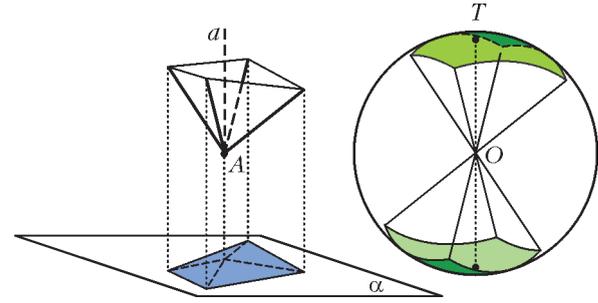


Рис. 13

точками многогранника; это значит, что $\pi(A)$ лежит строго внутри многоугольника N .³

С другой стороны, отрезок AB лежит внутри многогранного угла с вершиной A ; это и значит, что точка T лежит внутри одного из углов S_A или S'_A .

Случай 2 (рис.14). Пусть теперь прямая пересекается с многогранником только по вершине A . Тогда, как мы уже видели при доказательстве теоремы 1, через эту прямую можно провести плоскость β , пересекающую

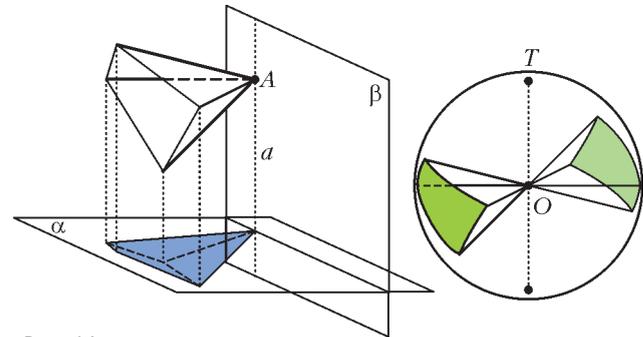


Рис. 14

наш многогранный угол (а следовательно, и весь многогранник) ровно по вершине A . Это значит, что многогранник M лежит по одну сторону от β ; но тогда и многоугольник N будет лежать по одну сторону от β , имея с ней только одну точку пересечения — $\pi(A)$. Такое возможно лишь в том случае, если $\pi(A)$ — вершина N .

С другой стороны, поскольку прямая a проходит вне многогранного угла с вершиной A , мы получаем, что точка T не лежит ни в одном из углов S_A и S'_A .

Итого, мы получили следующее описание величины t_i .

Теорема 3. Число t_i равно количеству вершин многогранника M , проекции которых попадают строго внутрь многоугольника N . Проекции же остальных вершин являются вершинами N .

Заметим еще, что каждая вершина B многоугольника N является проекцией одной из вершин многогранника. Действительно, если b — прямая, пересекающая N ровно по вершине B , то вертикальная плоскость, проходящая через b (т.е. плоскость, проходящая через b и параллельная OT), будет пересекать M также ровно по одной точке; она и будет искомым вершиной.

³ Действительно, если X — внутренняя точка отрезка AB , то найдется маленький шарик с центром в X , лежащий внутри M . Этот шарик перейдет в круг с центром в $\pi(X) = \pi(A)$, лежащий внутри N .

Далее, выясним, какие точки многогранника M переходят в точки контура многоугольника N . Пусть $\pi(A)$ и $\pi(B)$ – две соседние вершины многоугольника N (A и B – вершины многогранника M). Проведем через прямую $\pi(A)\pi(B)$ вертикальную плоскость γ . Многогранник M будет лежать по одну сторону от нее, причем в этой плоскости будет лежать отрезок AB , принадлежащий многограннику. Заметим, что больше точек многогранника в этой плоскости не будет; иначе в этой плоскости будет лежать грань M , что невозможно. Но тогда AB является ребром многогранника M !

Итак, любая сторона многоугольника N является проекцией ребра многогранника M . Значит, контур многоугольника N является проекцией некоторого замкнутого несамопересекающегося пути по ребрам многогранника M (назовем такой путь *циклом*).

Оценка на $\Sigma(M)$

Теперь мы готовы выписать оценку на $\Sigma(M)$.

Теорема 4. *Рассмотрим выпуклый многогранник M ; пусть у него n вершин, и пусть l_{\min} , l_{\max} – соответственно наименьшее и наибольшее количество ребер в цикле, проходящем по ребрам M . Тогда*

$$2\pi(n - l_{\max}) \leq \Sigma(M) \leq 2\pi(n - l_{\min}). \quad (3)$$

Замечание. Все условия в теореме зависят только от комбинаторного типа многогранника; таким образом, теорема позволяет оценить сумму телесных углов любого многогранника данного комбинаторного типа.

Доказательство теоремы. Для любой из частей K_i рассмотрим точку T_i внутри нее и проекцию N_i многогранника M на соответствующую плоскость. Мы уже знаем, что граница N_i является проекцией некоторого цикла; значит, количество вершин N_i не меньше l_{\min} и не больше l_{\max} . Значит, количество t_i вершин, чьи проекции лежат внутри N_i , удовлетворяют соотношению $n - l_{\max} \leq t_i \leq n - l_{\min}$, поэтому из (2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s S(K_i)(n - l_{\max}) &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s S(K_i)t_i = \\ &= \Sigma(M) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s S(K_i)(n - l_{\min}). \end{aligned}$$

Поскольку площадь единичной сферы равна $\sum_{i=1}^s S(K_i) = 4\pi$, мы получаем требуемое.

Из теоремы сразу следует

Решение задачи М2153. Пусть $\Sigma(M) = \pi$. Тогда $2\pi(n - l_{\max}) \leq \Sigma(M) = \pi$, откуда $n - l_{\max} \leq \frac{1}{2}$. Значит, $l_{\max} = n$, и существует цикл, проходящий по всем n вершинам многогранника.

Несложно и более явно описать этот цикл. Если мы отметим все многогранные углы M и симметричные им на нашей сфере, то мы отметим области суммарной площади $2\pi < 4\pi$; значит, некоторая точка T сферы останется непокрытой. Спроектировав наш многогранник на плоскость, перпендикулярную OT , мы получим

в проекции n -угольник. В его границу и проектируется требуемый цикл.

Задача 2. Ясно, что l_{\min} не превосходит минимального количества вершин в грани. А существует ли многогранник, в котором l_{\min} строго меньше, чем это минимальное количество?

Точные границы для $\Sigma(M)$

После доказательства предыдущей теоремы естественным образом возникает вопрос – а точны ли оценки в этой теореме? Нельзя ли их иногда заменить на более точные? Иными словами – если в многограннике минимальное и максимальное количество ребер в цикле равны l_{\min} и l_{\max} , правда ли, что существуют многогранники того же комбинаторного типа, у которых суммы телесных углов «почти достигают» значений, указанных в теореме 4?

Полный ответ на этот вопрос дал Д.Барнетт [3]; оказывается, оценки всегда точны! Однако, к сожалению, доказательство этого выходит за рамки этой статьи; мы ограничимся ответом на существенно более легкий вопрос. А именно, мы докажем следующее.

Теорема 5. *Рассмотрим все выпуклые многогранники некоторого комбинаторного типа с n вершинами, а также все их проекции (на плоскости, не перпендикулярные граням). Пусть l'_{\min} и l'_{\max} – наибольшее и наименьшее возможное количество сторон в таких проекциях. Тогда для любого выпуклого многогранника M данного типа выполнены неравенства*

$$2\pi(n - l'_{\max}) \leq \Sigma(M) \leq 2\pi(n - l'_{\min}), \quad (4)$$

причем эти оценки нельзя заменить на лучшие.

Замечание 1. Это – тоже интересное утверждение! Оно говорит, что *точная нижняя грань* и *точная верхняя грань* для $\Sigma(M)$ всегда являются целыми кратными числа 2π . Иначе говоря, если, например, мы знаем, что существует многогранник M данного комбинаторного типа с $\Sigma(M) = 5\pi$, то мы также можем быть уверены в существовании многогранников M' и M'' того же типа, для которых $\Sigma(M') < 4\pi + 0,001$ и $\Sigma(M'') > 6\pi - 0,001$.

Замечание 2. Поскольку при определении величины l_{\min} рассматриваются все циклы, а при определении l'_{\min} – только те, которые могут попасть на границу некоторой проекции, то, очевидно, $l'_{\min} \geq l_{\min}$. Аналогично, $l'_{\max} \leq l_{\max}$.

Доказательство теоремы. Доказательство самой оценки (4) повторяет доказательство теоремы 4: достаточно заметить, что в нем реально рассматриваются только циклы, проекции которых могут оказаться границей проекции всего многогранника; количество же сторон в любом таком цикле не меньше l'_{\min} и не больше l'_{\max} . Осталось доказать, что оценки точны.

Рассмотрим многогранник M данного комбинаторного типа, который при проектировании на плоскость α дает многоугольник с l сторонами (можно считать, что M лежит по одну сторону от α). Пусть в нем n вершин, причем A_1, A_2, \dots, A_l – вершины многогранника, проектирующиеся в вершины l -угольника, а B_1, \dots, B_m – все

остальные вершины (проецирующиеся внутрь l -угольника); тогда $m = n - l$. «Сожмем» многогранник к плоскости α с большим коэффициентом N ; иначе говоря, сдвинем каждую его точку по перпендикуляру к плоскости α так, чтобы расстояние от нее до α уменьшилось в N раз (рис.15).

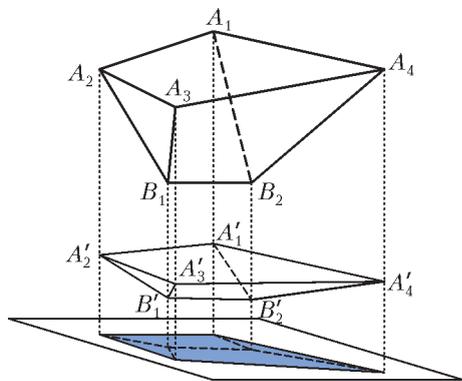


Рис. 15

У нас получился многогранник M' того же комбинаторного типа с вершинами $A'_1, \dots, A'_l, B'_1, \dots, B'_m$. Нетрудно понять, что если выбрать N достаточно большим, то все телесные углы при вершинах A'_i станут очень маленькими (скажем, меньше ε), а все телесные углы при вершинах B'_j будут сколь угодно близки к 2π (скажем, будут больше чем $2\pi - \varepsilon$). Тогда мы получаем, что

$$l \cdot 0 + (n - l)(2\pi - \varepsilon) < \Sigma(M') < l\varepsilon + (n - l)2\pi.$$

Поскольку $l \leq n$, получаем

$$2\pi(n - l) - n\varepsilon < \Sigma(M') < 2\pi(n - l) + n\varepsilon.$$

Выберем теперь в качестве M многогранник, в проекции которого есть $l = l'_{\min}$ сторон (такой существует по определению l'_{\min}). Тогда мы получим многогранник M' , для которого $\Sigma(M') > 2\pi(n - l'_{\min}) - n\varepsilon$. Наоборот, выбирая многогранник M с проекцией из $l = l'_{\max}$, получаем многогранник M'' с $\Sigma(M'') < 2\pi(n - l'_{\max}) + n\varepsilon$. Полагая ε сколь угодно малым, получаем, что оценки в (4) точны.

Опишем теперь суть вышеупомянутого результата Д.Барнетта. Рассмотрим некоторый выпуклый многогранник M и произвольный цикл из его ребер. Тогда можно построить многогранник такого же комбинаторного типа и его проекцию такие, что в границу проекции проецируется как раз этот цикл. Отсюда, разумеется, и следует, что $l_{\min} = l'_{\min}$, $l_{\max} = l'_{\max}$ (т.е. оценки в теореме 4 также точны).

Возвращаясь к задаче M2153, хочется заметить еще одну вещь. На первый взгляд может показаться, что в любом многограннике можно найти цикл, проходящий по всем вершинам, – такой цикл называется *гамильтоновым*. И действительно, не так-то просто построить пример многогранника, для которого это неверно; однако такие примеры существуют. Один из наиболее естественных примеров изображен на рисунке 16 (при-

веден его «вид сверху», невидимых ребер нет; этот пример взят из книги [2]). Читателю предоставляется самостоятельно доказать, что многогранник, изображенный на рисунке, существует и что в нем нет гамильтонова цикла.

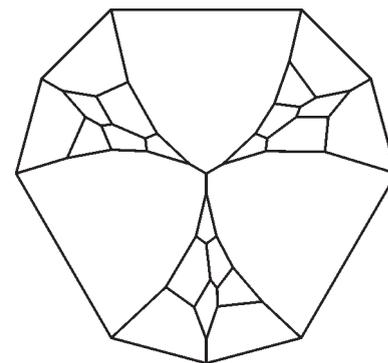


Рис. 16

Задачи

3. Постройте пример выпуклого многогранника M , в котором есть цикл длины 3, но любая проекция которого содержит хотя бы 4 стороны. Как оценить снизу сумму телесных углов такого многогранника?

4. Можно показать, что утверждение теоремы 5 остается справедливым, если вместо обычной параллельной проекции рассматривать проекцию центральную (естественно, проекцией нашего многогранника должен являться многоугольник, т.е. эта проекция должна быть ограниченной). Существует ли выпуклый многогранник, в котором есть цикл длины 3, но любая (ограниченная) центральная проекция которого содержит хотя бы 4 стороны?⁴

5. Найдите точные оценки для $\Sigma(M)$, где M – выпуклый многогранник, комбинаторно эквивалентный кубу. Приведите примеры, показывающие, что эти оценки точны.

6. Пусть выпуклый многогранник $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ комбинаторно эквивалентен кубу. Назовем его *проективно эквивалентным кубу*, если его главные диагонали AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 пересекаются в одной точке.⁵ Найдите точные оценки на сумму телесных углов такого многогранника.

7. В теореме 5 доказаны точные верхняя и нижняя оценки на величину $\Sigma(M)$, где M – многогранник данного комбинаторного типа. Тем не менее, не доказано, что $\Sigma(M)$ может принимать все значения из интервала $(2\pi(n - l'_{\max}); 2\pi(n - l'_{\min}))$! Попробуйте доказать это утверждение.⁶

Список литературы

1. Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики*. Часть 2. Геометрия (Планиметрия). – М.: ГИТТЛ, 1952.
2. Ф.Харари. *Теория графов*. – М.: Мир, 1973.
3. D.W.Barnette. *Projections of 3-polytopes*. – Israel J. Math, Vol. 8, 1970, pp. 304–308.
4. D.W.Barnette. *The sum of the solid angles of a d-polytope*. – Geometriae dedicata. Vol. 1, Num. 1, 1972, pp. 100–102.

⁴ Задачи 3 и 4 уже показывают, что теорема Барнетта непростая.

⁵ Для профессионалов: это означает, что существует проективное преобразование, которое переводит M в куб.

⁶ Сразу заметим, что соображения, которые мы приводили для тетраэдра, могут не сработать. Именно, непонятно, каким образом можно непрерывно деформировать многогранник, в котором есть нетрехугольные грани и вершины, в которых сходятся больше трех граней: эти условия не так легко соблюсти при непрерывной деформации.

105 лет академику С. М. Никольскому

30 апреля 2010 года исполнилось 105 лет выдающемуся российскому математику и педагогу, академику РАН Сергею Михайловичу Никольскому.

С.М.Никольский — признанный глава научной школы теории функций и ее приложений, автор свыше двухсот научных публикаций, в том числе трех монографий, двух учебников для вузов и семи — для школ. Многие из его книг вошли в золотой фонд отечественной и мировой литературы по математике благодаря высокому научному уровню и доступности изложения. Его учебники по математическому анализу переведены на многие языки мира.

Как ученый, С.М.Никольский имеет немало последователей, более сорока его учеников защитили кандидатские диссертации, одиннадцать стали докторами физико-математических наук. Неоценимый вклад С.М.Никольский внес в совершенствование системы образования в нашей стране.

С.М.Никольский — трижды лауреат Государственной премии, лауреат премии Правительства РФ, премии МГУ имени М.В.Ломоносова «За выдающийся вклад в развитие образования». В 2005 году удостоен звания «Легенда века». Награжден орденами Трудового Красного Знамени, Ленина, Октябрьской Революции и медалями ряда академий.

Поздравляем Сергея Михайловича с юбилеем, желаем здоровья, радости от общения с родными и близкими, успехов во всех делах!



Сергей Михайлович Никольский

Начало

(По воспоминаниям С.М.Никольского из книги «Как я стал математиком»)

Я родился 30 апреля 1905 года в Пермской губернии, в 100 км от Тюмени, в поселке Завод Талица. В этом поселке была Лесная школа, в которой преподавал мой отец, помощник лесничего. Отец закончил в 1896 году Петербургский лесной институт имени Александра III. Через год после моего рождения он получил должность лесничего и назначение работать на крайний запад, на границу с Германией. Теперь эта территория принадлежит Польше. Там я провел детство в лесной деревне, в играх с местными деревенскими польскими мальчишками. Грамоту и счет я одолел походя, легко. Некоторое обучение я получил со стороны матери — она до замужества была сельской учительницей.

Науки давались мне довольно легко. Полчаса перед обедом мать учила арифметике, чтению, молитве. Но главный интерес к точным наукам привил отец. Он проходил в институте высшую математику и умел очень интересно рассказывать.

В восемь лет меня приняли в подготовительный класс. Оказалось, что все, чему меня там учили, я

уже знал. Через год был экзамен в 1-й класс. Учитель математики с университетским значком спросил меня, сколько будет 10 помножить на 11. Хотя это не входило в программу поступления в 1-й класс, но я быстро ответил. Тогда он спросил, сколько будет 11 помножить на 12. Я тоже ответил. Тогда он оживился и стал спрашивать, сколько будет 13 на 14, 15 на 17, 16 на 17 и так почти до тысячи. После некоторых раздумий я давал правильные ответы. Он поставил мне «пять». Так я держал первый экзамен по арифметике.

Летом 1914 года началась мировая война, а мы жили в 20 км от германской границы. Отец послал семью на восток, в тыл, а сам остался в лесничестве. Так мы оказались в Чернигове. Здесь я поступил в классическую Черниговскую гимназию имени Александра I Благословенного. В связи с войной переводные экзамены из класса в класс были отменены. Первые два года обучение происходило нормально. Фронт был далеко. Я успел хорошо освоить арифметику — по Киселеву. В 3–4-м классах гимназии изучалась алгебра. По математике мне обыкновенно ставили «пятерки». Я любил решать задачи.

К концу войны началась революция, потом в Чернигов пришли немцы. Так мы прожили до 1918 года. Наш отец жил отдельно от семьи, главным образом, в Петербурге. Но в 1918 году он получил назначение в лесничество на юге Воронежской губернии, в знаменитый Шипов лес, и вызвал к себе семью. Так мы стали жить на краю величественного дубового леса, корабельного леса, но вдали от городов. На расстоянии 30 км от нас в ту и в другую сторону были уездные города, а здесь был только лес и деревня.

С 1918 и по конец 1921 года я не учился, успев проучиться в гимназии только в первых четырех классах. А в Шиповом лесу мне пришлось работать в лесничестве, зарабатывать деньги. Сначала мы жили на зарплату, которые сильно удешевлялись, деньги переставали иметь какую-либо ценность. Кроме того, случились сильные недороды, большие засухи. Так что довольно скоро мы стали жить в сравнительно тяжелых условиях, настолько тяжелых, что в начале 1921 года отец устроил меня работать помощником садовника в совхозе, там все-таки кормили. Но и в этих условиях я кое-чему учился. И даже многому научился. От отца.

Он время от времени занимался с детьми, от него я узнал всю среднюю математику. От него я впервые узнал, что есть уравнения – линейные и квадратные, что есть такая парабола. Правда, мы не очень занимались вопросом, как ведет себя парабола, если она задана уравнением $y = a(x - x_0)^2 + y_0$. Но я хорошо себе представлял параболу $y = x^2$ или $y = ax^2$. Больше того, отец знал начала анализа. Эти сведения я тоже получил от него. Я умел дифференцировать, знал, что производная геометрически изображается касательной, и так далее. Все это я хорошо усвоил, не учась в школе.

Так случилось, что летом 21-го года моего отца убили бандиты. И в это время был довольно сильный недород. Два моих брата умерли от холеры, и с остатками семьи мы уехали обратно в Чернигов, где в то время можно было, по крайней мере, как-то нормально питаться. В Поволжье и в тех местах, где мы раньше жили, было очень голодно.

В Чернигов стекалось много столичных людей, потому что в столице было трудно жить. Среди них были и преподаватели, получившие достаточно высокое математическое образование. Вот один из таких учителей как раз и экзаменовал нас при поступлении на подготовительное отделение в техникум. Он не очень следовал программам, а спрашивал так, как считал нужным. Каждый экзаменуемый приходил к нему с бумажкой. И он быстро писал два вопроса, на которые после обдумывания экзаменуемый должен был ответить.

У меня тоже было два вопроса. Первый – нарисовать параболу $y = x^2 + 4$. Параболу я построил по точкам довольно легко. А второй вопрос должен был иметь теоретический характер. Учитель хотел, чтобы я что-то рассказал про дистрибутивный закон, но так небрежно написал на бумажке $(a + b)n$, что я подумал, что n находится в показателе степени. Но я знал бином Ньютона – со всеми сочетаниями...

Нас экзаменовал еще и комиссар, приехавший из обкома. Он терпеливо и с большим удивлением слушал, как я выводил по всем правилам математического искусства формулу бинома Ньютона. А когда я закончил, он сказал: «Так тебе же дали совсем другое».

Теперь, когда я вспоминаю тот случай, то думаю, что если бы я знал, что там написан дистрибутивный закон, то оказался бы в большом затруднении, потому что не знал, что мне надо сказать... Эту философию я совсем не знал. Скобки раскрыть для меня не было проблемы, а что говорить при этом, я не знал.

В то время в Чернигове, в техникуме в частности, были преподаватели очень высокой квалификации. Был там один математик Давыдов, который очень талантливо рассказал о теории вероятностей. Он какие-то примеры приводил, быстро переходил к условной вероятности, математическому ожиданию – все это он рассказал нам почти на пальцах буквально за два урока. Я не хочу сказать, что все знал, находясь в лесу, я кое-что еще добавил к своим знаниям в техникуме.

Про меня еще мой отец говорил: «Сергея у нас математик. Будет инженером». И я считал, что буду инженером. Каким? Об этом я тогда еще не думал. В техникуме первый год я был на механическом факультете.

В нашем общежитии жили и студенты-математики. Были такие, которые считали, что учатся в слабом институте и еще поедут учиться в Петербург. И я так думал: вот поеду в Петербург, поступлю там в какой-нибудь технический вуз. Тогда о техническом вузе мечтали многие, в особенности те, кто чувствовал, что в математике что-то смыслит.

Так что были такие ребята, которые обзаводились какими-то задачками, и по ходу дела им надо было решить какую-то задачу по математике. Я, бывало, спрошу: «Какую задачу тебе надо решить? Давай я попробую». И, как правило, решал. Даже не «как правило», а просто не было ни одного случая, чтобы я не решил. Я даже стал немножко зазнаваться. Они говорили, что я не решаю, а я им – что нет, решаю. И добавлял: «За полчаса решаю». Они брали часы, отмеряли полчаса, я в это время над какой-нибудь тригонометрической задачей думал. Это факт, что я решал задачи и даже ходил на «пари». Такое было мое отношение к математике. Я с удовольствием и с интересом решал различные математические задачи, но сам себе эти задачи особенно не задавал и подряд из задачника не решал. Но если было нужно, то решал задачи с удовольствием и с интересом – это факт.

Потом я поступил на математическое отделение Екатеринбургского университета с тем, чтобы через год перевестись в инженерный вуз. Но по мере того, как я там учился и стал изучать книжки соответствующие, я пришел к заключению, что математика очень интересная и глубокая наука, настолько интересная, что мне надо продолжать учиться именно математике. Я решил, что буду профессионалом-математиком. Пусть я буду только учителем математики, и пусть мне будут платить меньше, но все равно я хочу быть математиком.

Квантовые и волновые явления в наномире

В. ТИМОШЕНКО

В ОБЫЧНОЙ ЖИЗНИ, НАБЛЮДАЯ ДВИЖЕНИЕ КАКОГО-ЛИБО ОБЪЕКТА, люди стремятся узнать как можно точнее основные характеристики такого движения. Например, нам нужно знать точное расписание движения электрички или автобуса, чтобы вовремя добраться к желанной цели. Человек хочет иметь данные о движении планет и законах вращения Земли, чтобы предсказать природные явления, а порой и просто составить астрологический прогноз, хотя тот и не имеет к научному знанию никакого отношения.

В классической физике стремление к точности описания движения тел формализуется постановкой задачи о нахождении закона движения, а именно – формулы или графика, описывающих, как тело переместилось из точки A в точку B за время t . И чем точнее решается данная задача, тем лучше. То, что подобная задача должна иметь точное решение, составляет суть идеи детерминизма в физике, наиболее ярким и полным выразителем которой стал великий французский ученый XVIII–XIX веков Пьер Лаплас.

Но если лапласовский детерминизм является основным в классической физике, включая небесную механику, то для микромира и столь популярных в настоящее время наносистем, представляющих собой тела или совокупности тел с характерными размерами от 1 до 100 нм, использование методологии детерминизма требует серьезного переосмысления. Оказывается, что в наносистемах точное знание законов движения порой не представляется возможным, а само движение это уже не простое перемещение, а нечто подобное волне, когда максимум сменя-

ется минимумом и наоборот. Но как же быть тогда с основной задачей нанотехнологий – создавать наносистемы, наноматериалы и нанообъекты с нанометровой точностью и знать о поведении таких объектов с наносекундным или даже субнаносекундным временным разрешением? Желание точности – весьма похвально. И не только для королей, метрологов или нанотехнологов. Точность и определенность – хорошие качества для любого образованного человека. Но, увы, в мире наноразмеров и наноперемещений, или, проще говоря, в наномире, стремление к максимальной точности упирается в ряд фундаментальных ограничений, которые если и не отменяют возможность сколь угодно точного описания материальных тел, то значительно изменяют смысл того, что мы можем узнать о движении на очень малых расстояниях.

Само движение тела уже не может быть зачастую описано как перемещение из точки A в точку B , а скорее должно рассматриваться как движение волны, при котором можно лишь утверждать, что тело попадет в желаемую точку с некоторой вероятностью. Другими словами, определенность законов движения, или детерминизм, являющийся краеугольным камнем классической физики, уступает место вероятностному способу описания мира. Такой подход к описанию мира был предложен около ста лет назад, когда создавалась квантовая физика, в частности квантовая механика. Он не сразу был понят и принят даже физиками, поскольку очень непросто примириться с отсутствием детерминизма в науке. Так, известен афоризм Альберта Эйнштейна о том, что «Бог не играет в кости». Таким высказы-



Лаплас Пьер Симон (1749–1827) – французский астроном, математик и физик, член многих академий наук и научных обществ. Считается, что последними словами Лапласа были: «То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, что мы не знаем»



Эйнштейн Альберт (1879–1955) – выдающийся физик-теоретик, один из создателей современной физики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1921) «за заслуги перед теоретической физикой и особенно за открытие закона фотоэлектрического эффекта»

ванием великий физик, который сам являлся одним из основоположников квантовой физики, бросил вызов разработчикам квантовой механики. Они его приняли и создали стройную научную теорию, которая может описать как движение зарядов в атоме, так и перемещение более крупных тел, например наночастиц. Но, что самое важное, исходя из квантовой механики, хорошо прослеживается переход от неопределенности перемещений малых объектов к детерминизму движения макроскопических тел. Именно это крайне важно для нанотехнологий, стремящихся создавать новые вещества и устройства методами как «сверху-вниз», так и «снизу-вверх».

Чтобы разобраться в том, как все же можно описывать свойства тел и различные явления в наномире, вспомним важнейшие фундаментальные законы (постулаты) квантовой физики.

Постулат первый гласит, что любая движущаяся частица является одновременно волной, а волна может



Де Бройль Луи (1892–1987) – французский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1929) «за открытие волновой природы электронов»

рассматриваться как частица. Этот постулат выражает суть концепции *корпускулярно-волнового дуализма*, предложенной в 1923 году французским ученым Луи де Бройлем. Согласно теории де Бройля, для описания движения материального объекта необходимо знать как его корпускулярные характеристики, например импульс или энергию, так и волновые характеристики, а именно длину волны или частоту. В частности, частице с импульсом p можно сопоставить так называемую длину волны

де Бройля:

$$\lambda_D = \frac{h}{p},$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка.

Заметим, что аналогичное соотношение было предложено еще в 1900 году Максом Планком для частоты и энергии квантов света – фотонов:

$$\nu = \frac{E}{h}.$$

За это гениально простое соотношение в 1918 году Планк был удостоен Нобелевской премии. Предложенное Планком выражение не только позволило объяснить спектр теплового излучения тел, но и стало отправной точкой для объяснения многих важнейших физических эффектов – таких, например, как фотоэф-

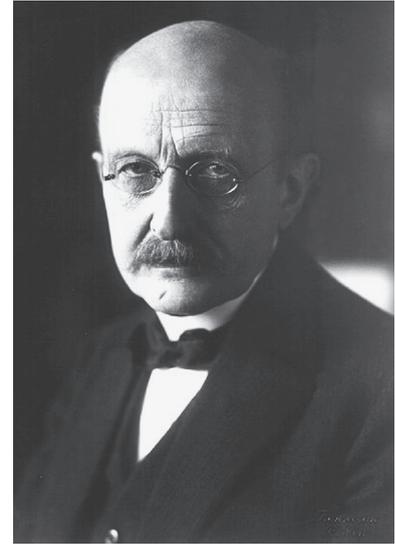
фект. Нобелевскую премию за объяснение фотоэффекта присудили в 1921 году Альберту Эйнштейну, который в своей работе, вышедшей в 1905 году, применил гипотезу Планка для объяснения испускания электронов из твердых тел под действием света. Считается, что именно Эйнштейну принадлежит заслуга в объяснении физического смысла связи между частотой и энергией света.

Таким образом, де Бройль распространил гипотезу Планка, первоначально относящуюся только к квантам света – фотонам, на любые движущиеся тела. Но насколько необходимо учитывать волновые свойства для реальных тел? Чтобы ответить на этот вопрос, попробуем сделать простые оценки.

Рассмотрим свободный электрон массой $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг в твердом теле, например металле, при комнатной температуре. Согласно классической электронной теории, такой электрон должен иметь тепловую скорость $v = 10^5$ м/с. В этом случае соответствующая длина волны де Бройля будет равна $\lambda_D = \frac{h}{mv} = 7,3$ нм. И хотя, согласно современным представлениям, скорость электронов в твердых телах может быть во много раз больше, для многих металлов и полупроводников λ_D лежит в диапазоне 1–10 нм. А значит, при описании электронных явлений в наномире нельзя пренебрегать волновыми свойствами электронов и подобных им частиц.

Иначе обстоит дело с макроскопическими телами и недостаточно маленькими микрочастицами. Рассмотрим в качестве примера один из самых мелких микроорганизмов, а именно микроб размером 1 мкм и массой 10^{-13} кг, передвигающийся со скоростью 1 мкм/с. Легко посчитать, что для микроба длина волны де Бройля составит величину порядка 10^{-15} м = 10^{-9} мкм = 10^{-6} нм, т.е. будет пренебрежимо мала по сравнению не только с его размерами, но и с размерами атома $a_0 \sim 0,05$ нм. Следовательно, при описании движения микроба можно пренебречь его волновыми свойствами, как, впрочем, можно пренебречь волновыми свойствами аналогичных и более крупных объектов микро- и макромира.

Но чем меньше (легче) тело и чем меньше его скорость, тем значимее становятся его волновые свойства. Так, для свободной частицы нанометровых разме-



Планк Макс Карл Эрнст Людвиг (1858–1947) – немецкий физик-теоретик, основоположник квантовой теории. Лауреат Нобелевской премии по физике (1918) «в знак признания его заслуг в развитии физики благодаря открытию квантов энергии»

ров, скажем для нанокристалла кремния с поперечным размером 1 нм и, значит, массой 10^{-24} кг, обладающего при комнатной температуре тепловой скоростью 10^2 м/с, получим длину волны де Бройля $\lambda_D \approx 0,007$ нм. Эта величина по-прежнему много меньше, чем размер рассматриваемой частицы, поэтому механическое движение таких малых тел можно рассматривать, пренебрегая их волновой природой. Однако при анализе внутренних форм движения нанокристаллов, т.е. движения субнанометровых частей или частиц, необходимо учитывать волновые свойства составляющих их атомов и электронов (об этом будет подробнее рассказано ниже).

Итак, согласно постулату о корпускулярно-волновом дуализме, нельзя забывать о волновой природе малых частиц, особенно если соответствующая длина волны сопоставима с размерами частицы и шкалой ее перемещений. А может ли наночастица, движущаяся с небольшой скоростью или находящаяся в среднем в состоянии покоя, иметь длину волны де Бройля, сопоставимую с ее размерами или превышающими такие размеры? Формально из формулы, предложенной де Бройлем, следует, что покоящаяся частица должна иметь бесконечную длину волны λ_D . На самом же деле малую частицу нельзя привести в состояние полного покоя. Чем меньше и легче объект, тем сложнее его



Гейзенберг Вернер Карл (1901–1976) – немецкий физик-теоретик, создатель матричной квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1932) – «за создание квантовой механики...»

остановить, зафиксировать и измерить, например, его размеры. И это – еще одно фундаментальное свойство наномира. С ним связан **второй постулат** наномира – *принцип неопределенности Гейзенберга*.

Этот принцип, являющийся одним из основополагающих в квантовой механике, был сформулирован в 1927 году Вернером Гейзенбергом. Согласно принципу неопределенности, невозможно одновременно измерить со сколь угодно высокой точностью пары ряда

физических величин, в том числе импульс и координату, энергию и время. При измерении указанных пар величин будут выполняться соотношения неопределенности для погрешностей (неопределенностей) их измерений:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2},$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – тоже постоянная Планка (иногда называемая постоянной Дирака). Та-

ким образом, зная, например, что проекция скорости частицы массой m составляет величину $v_x \pm \Delta v_x$, соответствующую координату частицы можно измерить с погрешностью $\Delta x \geq \frac{\hbar}{2m\Delta v_x}$. Иными словами, координата может быть известна только как некоторая величина $x \pm \Delta x$, где x – среднее значение. Если же в среднем частица покоится, т.е. $v_x = 0$, то величина $m\Delta v_x$ представляет собой максимально возможный импульс частицы по оси x . Тогда, в соответствии с постулатом о корпускулярно-волновом дуализме, неопределенность координаты связана с максимальной возможной длиной волны де Бройля: $\Delta x \geq \frac{\lambda_D}{4\pi}$. Это указывает на взаимосвязь обоих упомянутых постулатов квантовой механики, отражающих вероятностный характер мира малых масштабов.

Но если в наномире все так неопределенно и о важнейших характеристиках движения можно судить лишь с некоторой вероятностью, то возникает вопрос: можно ли предложить какие-либо строгие количественные законы для описания хотя бы средних характеристик движения? Ответ на этот вопрос дает **третий постулат**, который гласит, что каждому телу можно сопоставить некоторую зависимость от времени и координат функцию, называемую *волновой функцией* $\Psi(\vec{r}, t)$. При этом квадрат модуля волновой функции $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ описывает математическую вероятность нахождения частицы в данной точке пространства в данный момент времени, а сама волновая функция должна удовлетворять некоторому уравнению, которое называется *уравнением Шрёдингера*. В случае, когда частица находится в поле сил, которые можно описать с помощью функции потенциальной энергии $U(\vec{r})$, не зависящей явно от времени, справедливо стационарное уравнение Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}) + U(\vec{r})\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}),$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – так называемый оператор Лапласа, описывающий дифференцирование по координатам, коэффициент E имеет смысл энергии частицы, которая в силу ее квантовых свойств может принимать дискретные значения, называемые *соб-*



Шрёдингер Эрвин Рудольф Йозеф Александр (1887–1961) – австрийский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике (1933) «за открытие новых продуктивных форм атомной теории»

ственными значениями энергии. В одномерном случае при постоянном значении потенциальной энергии: $U = \text{const}$ уравнение Шрёдингера подобно уравнению колебаний:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m(E-U)}{\hbar^2}\Psi(x) = 0.$$

Здесь аналогом частоты выступает коэффициент $\frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$, следовательно, пространственный период функции $\Psi(x)$ равен

$$\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E-U)}} = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}} = \frac{h}{p} = \lambda_D.$$

Таким образом, решением стационарного уравнения Шрёдингера является волновая функция, периодическая в пространстве с периодом, равным длине волны де Бройля. Другими словами, волна де Бройля – это решение уравнения Шрёдингера в простейшем случае свободного движения частицы. Если же движение ограничено или испытывает какие-либо внешние возмущения, необходимо учитывать отражения или искажения при распространении волн де Бройля, что автоматически реализуется при решении уравнения Шрёдингера с соответствующей функцией потенциальной энергии. Вывод о возможности получить волну де Бройля из решения уравнения Шрёдингера указывает на взаимосвязь основных постулатов квантовой физики, описывающих с разных сторон особенности наномира.

Как известно, волны могут характеризоваться не только длиной волны, частотой и амплитудой, но и другим важным параметром – поляризацией волны. Если движение частиц среды или вектора амплитуды в волне происходит в направлении, перпендикулярном направлению ее распространения, то такая волна называется поперечной, а если вдоль направления движе-

ния волны, то – продольной. В случае поперечной волны направление колеблющегося вектора амплитуды также может быть различным, что выражается поляризацией волны. Например, для линейно поляризованной волны направление колебаний вектора амплитуды всегда соответствует одному пространственному направлению, а для круговой или эллиптической поляризации конец вектора амплитуды за период колебаний описывает окружность



Паули Вольфганг Эрнст (1900–1958) – выдающийся физик-теоретик. Лауреат Нобелевской премии по физике (1945) «за открытие принципа запрета»

или эллипс соответственно. Но если для движения малых (субнанометровых) частиц необходимо учитывать их волновые свойства, то нужно ли принимать во внимание возможность различной поляризации таких волн де Бройля? И если нужно, то как соотносить поляризационные свойства частиц с их корпускулярными характеристиками? Данный вопрос в квантовой физике решается введением особой характеристики – спина частицы (от английского spin – вертеться), который отражает состояние ее внутреннего движения. Понятие спина было введено в физику Вольфгангом Паули.

Согласно определению, спином элементарной частицы называется ее собственный момент импульса, имеющий квантовую природу и не связанный с перемещением частицы как целого. Спином также характеризуют собственный момент импульса атомного ядра или атома; в этом случае спин определяется как векторная сумма (вычисленная по правилам сложения моментов в квантовой механике) спинов элементарных частиц, образующих систему, и орбитальных моментов этих частиц, обусловленных их движением внутри системы. Спин измеряется в единицах \hbar и равен $S = \hbar J$, где J – характерное для каждого сорта частиц целое (в том числе нулевое) или полуцелое положительное число, так называемое спиновое квантовое число, которое обычно называют просто спином. В связи с этим говорят о целом или полуцелом спине частицы. Так, для электрона спин равен $1/2$, а для пары электронов или пары электрон-дырка в полупроводнике полный спин может принимать значения 0 или 1. Известно, что во внешнем магнитном поле спин ведет себя подобно магнитной стрелке, т.е. ориентируется по полю. Но квантовая природа спина проявляется в том, что проекция спина на направление магнитного поля может принимать только дискретные значения. Например, для свободного электрона проекция спина составляет $+1/2$ и $-1/2$, а для электрон-дырочной пары со спином 1 такие проекции равны $+1$, -1 и 0 . Экспериментально и теоретически установлено, что даже в отсутствие внешнего магнитного поля такая система имеет различные энергии в случае, если ее полный спин равен 0 или 1. Правда, для большинства случаев разница в энергиях не превышает величины порядка $0,001$ мэВ. Обсуждаемая разность энергий связана с магнитным взаимодействием между спинами – спин одной частицы создает магнитное поле, которое сообщает дополнительную энергию спину другой частицы, и наоборот. Указанное взаимодействие называется обменным и для большинства веществ является достаточно слабым по сравнению с энергией теплового движения частиц при комнатной температуре. Но для нанообъектов данное взаимодействие может усилиться во много раз, достигая и даже превышая 25 мэВ – энергию теплового движения при комнатной температуре. Это связано с малыми размерами нанообъектов, при которых спины приближаются друг к другу, что усиливает их взаимодействие.

Изложенные выше основные сведения о квантовых и волновых свойствах материи позволяют объяснить

одно из уникальных и интереснейших свойств наномира, а именно зависимость энергии частиц от их размеров, которое имеет исключительно важное значение для практических применений. Данное свойство получило название «квантовый размерный эффект».

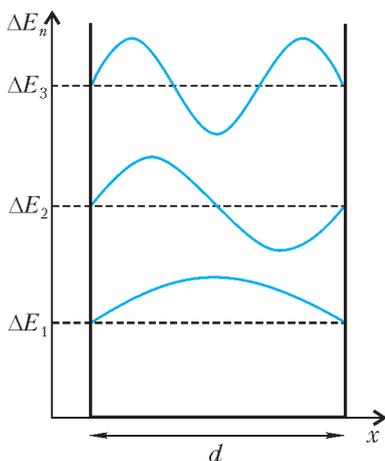


Рис.1. Частица в квантовой яме с бесконечно высокими стенками

Помещена в квантовую яму с бесконечно высокими стенками. Частица в такой яме ведет себя, как световая волна в резонаторе – отражение от стенок квантовой ямы приводит к возникновению стоячих волн, среди которых самыми устойчивыми будут те, которые могут укладываться целое число раз на длине d (рис.1). Математически это выражается следующей формулой:

$$\frac{1}{2} n \lambda_D = d, \text{ где } n = 1, 2, 3 \dots$$

Поскольку длина волны де Бройля связана с импульсом частицы, то проекция последнего однозначно будет принимать дискретные значения:

$$p_x = \frac{h}{\lambda_D} = \frac{h}{2d} n.$$

Кинетическая энергия частицы, которая очевидным образом связана с импульсом, приобретет дискретные добавки:

$$\Delta E_n = \frac{p_x^2}{2m} = \frac{h^2}{8md^2} n^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} n^2.$$

В полученных выражениях натуральное число n соответствует номеру уровня размерного квантования, а величина ΔE_n называется энергией уровня размерного квантования. При этом нижшим уровнем размерного квантования является уровень с $n = 1$. Энергии ΔE_n по существу являются квантово-размерными добавками к энергии свободной частицы. Величина добавки возрастает прямо пропорционально квадрату номера уровня размерного квантования и обратно пропорционально квадрату ширины квантовой ямы. Это и есть квантовый размерный эффект в простейшем случае.

В общем случае необходимо учитывать, что бесконечно высоких стенок у потенциальных ям (барьеров) не бывает, а также то, что движение может быть ограничено сразу по нескольким направлениям. Существуют

наносистемы, для которых свободное движение частиц-волн возможно только по одному пространственному направлению. Такие системы называются одномерными наносистемами, или квантовыми нитями. Если ограничение для свободного движения частиц имеет место по всем трем направлениям, то такую наносистему принято называть нульмерной, или квантовой точкой. Для квантовых точек рост энергии размерного квантования не просто многократно увеличивается по сравнению с квантовой нитью или ямой того же размера d , но и возникают качественно новые эффекты, связанные с симметрией волновой функции $\Psi(\vec{r})$. Так, для малых квантовых точек сферической формы эта функция начинает зависеть от орбитального квантового числа, а энергетический спектр квантовой точки становится похожим на спектр атома. Поэтому иногда квантовые точки образно называют «искусственными атомами». Такое название также отражает возможность конструирования электронных свойств квантовых точек с помощью задания их формы и точного числа составляющих их обычных атомов.

Отметим, что выражение для квантово-размерной добавки к энергии частицы можно также получить из соотношения неопределенностей для координаты и импульса:

$$\Delta E = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8md^2}.$$

Последнее выражение с точностью до коэффициента $\frac{\pi^2}{4}$ равно приведенному ранее значению для ΔE_n при $n = 1$. Отсутствие полного количественного соответствия не удивительно, учитывая, что соотношение неопределенностей дает лишь оценку погрешности измерения физической величины, а не ее точное значение. Но данное соотношение придает глубокий физический смысл квантовому размерному эффекту, указывая на то, что энергия частицы возрастает ввиду определенной локализации ее в пространстве. И чем сильнее такая локализация, тем больше энергия.

Так что же, все уникальные свойства наномира могут быть сведены к квантовому размерному эффекту, увеличивающему энергию частиц, а квантовый размерный эффект всего лишь частный случай реализации соотношения неопределенностей Гейзенберга или решения уравнения Шрёдингера? Конечно же, нет. Помимо рассмотренных выше упрощенных представлений о частице-волне в потенциальной яме, огромное число эффектов в наномире зависит от статистических свойств частиц. Это определяет их термодинамические и электродинамические свойства. Большое значение также имеют коллективные эффекты, когда свойства двух или более взаимодействующих частиц уже не равны простой сумме свойств этих частиц. В частности, наличие у частиц такой квантовой величины, как спин, приводит к тому, что у них появляются уникальные оптические и магнитные свойства. Причем эти свойства также зависят от размера наночастиц.

В качестве примера размерного эффекта, связанного с электрическими полями и со спином, рассмотрим

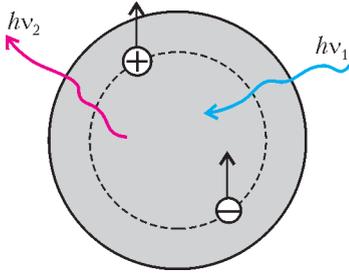


Рис.2. Экситон в квантовой точке. Вертикальные стрелки вблизи электрона и дырки указывают на наличие спина. Входящая и исходящая фигурные стрелки соответствуют процессам поглощения фотона (рождение экситона) и испускания фотона (аннигиляция экситона)

квантовую точку (рис. 2) диаметром d , в которую попадает фотон с энергией $h\nu_1$, достаточной для так называемого внутреннего фотоэффекта – перехода электрона из связанного состояния вблизи некоторого атома в свободное состояние, соответствующее делокализации электрона по многим атомам квантовой точки. Такое свободное, а точнее квазисвободное, состояние есть состояние электрона проводимости в полупроводнике.

Остающаяся вблизи его прежнего места локализации область избыточного положительного заряда называется дыркой, которая, как и квазисвободный электрон, имеет эффективную массу, заряд и даже спин. В простейшем случае спин дырки, как и квазисвободного электрона, равен $1/2$. Поскольку электрон притягивается к дырке, как отрицательный заряд притягивается к положительному, может возникнуть новая квазичастица – экситон, – подобная атому водорода, но где роль протона выполняет дырка. Обычно энергия экситона не превышает энергии фотона, породившего данный экситон: $E_{\text{экс}} \leq h\nu_1$. Поскольку энергия экситона зависит от размера квантовой точки, увеличиваясь с уменьшением ее размера, то может возникнуть ситуация, когда фотон уже не может поглотиться и экситон не возбуждается. Это – очевидное следствие квантового размерного эффекта. Если же экситон возник, то полная его энергия равна энергии фотона, появляющегося при аннигиляции экситона: $h\nu_2 = E_{\text{экс}}$.

Но есть еще ряд эффектов, которые также зависят от размеров квантовой точки. Во-первых, чем меньше квантовая точка, тем ближе электрон к дырке (тем меньше радиус экситона) и тем сильнее взаимодействие между ними, поскольку, как известно, потенциальная энергия кулоновского взаимодействия электрических зарядов зависит от расстояния между зарядами, как $U_{\text{эл}}(r) \sim \frac{1}{r} \sim \frac{1}{d}$. А так как эта энергия имеет отрицательное значение, то уменьшается и полная энергия экситона $E_{\text{экс}}$. Данный эффект кулоновского взаимодействия приводит к ослаблению квантово-размерного увеличения $E_{\text{экс}}$ при уменьшении d .

Во-вторых, как уже отмечалось выше, вследствие сложения спинов электрона и дырки полный спин экситона $S_{\text{экс}}$ может быть равен как 0, так и 1. Причем непосредственно при поглощении фотона может появиться лишь экситон с $S_{\text{экс}} = 0$, а экситон с $S_{\text{экс}} = 1$ не может появиться, поскольку ввиду отсутствия у фотона механического момента движения такой процесс запрещен законами сохранения. Разность энергий

экситона в состояниях со спином 0 и 1, которая иногда называется энергией обменного взаимодействия, может быть оценена как энергия взаимодействия двух магнитных диполей: $U_{\text{м}}(r) \sim \frac{1}{r^2}$. В объемных фазах вещества, где нет ограничения для движения электронов и дырок, величина обменного взаимодействия крайне мала, но при уменьшении размеров квантовой точки она может достигать значений порядка и более энергии теплового движения, что будет оказывать влияние как на оптические, так и на магнитные свойства квантовых точек. Так, немагнитное вещество, состоящее из таких квантовых точек, при освещении может приобрести намагниченность. А это очень важно для возможности оптического считывания и записи информации. Эффекты подобного рода представляет собой фундаментальные предпосылки для развития новой области науки и техники – спинтроники. В общем случае энергия экситона может значительно отличаться от энергии свободных невзаимодействующих электрона и дырки – обозначим такую энергию как $E_{\text{своб}}$ – на величину энергии размерного квантования, кулоновского взаимодействия и магнитного спин-спинового взаимодействий: $E_{\text{экс}} = E_{\text{своб}} + \Delta E - \Delta E_{\text{эл}} \pm \Delta E_{\text{м}}$. При помощи нанотехнологий можно менять размеры квантовых точек, а значит, управлять энергией экситонов, что позволяет создавать вещества с уникальными электронными и оптическими свойствами, которые могут быть использованы для создания новых устройств в информатике, фотонике и электронике.

Итак, несмотря на царящую в наномире неопределенность точных значений координат и импульсов частиц-волн, строгие законы квантовой механики все же позволяют рассчитать многие важные физические характеристики наносистем. Причем эти характеристики – такие, например, как энергия размерного квантования – имеют первостепенное значение для электронных и оптических свойств материалов, составленных из наноструктур. Точное знание энергетических параметров наночастиц дает определенность их поведения под воздействием различных факторов, таких как свет, электрическое или магнитное поле, нагрев. А это значит, что мы можем предсказывать поведение наносистем, материалов и устройств на их основе. И пусть детали внутреннего движения в наносистеме не всегда можно представить, а тем более описать с высокой степенью точности, но физически измеряемый и практически важный итог такого движения всегда известен однозначно, если известны такие параметры наносистемы, как геометрические размеры, вид и число носителей заряда и т.п.

Таким образом, мы приходим к детерминизму свойств наносистем, и, следовательно, задача нанотехнологий по созданию новых объектов, устройств и материалов с требуемыми свойствами может быть в принципе решена всегда. Главное при решении такой задачи – не увлекаться и не преступать границы, установленные физическими законами наномира.

По страницам сочинения Герона Александрийского «О диоптре»

А.ЖУКОВ

ГЕРОН АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ ТВОРИЛ НА РУБЕЖЕ новой эры (предположительно I в. до н.э. – I в. н.э.). У своих современников он снискал славу искусного изобретателя. Телеги со специальным устройством Герона, послужившим прототипом современного таксометра, хорошо измеряли расстояние между городами и весями. Водяные часы Герона довольно точно отсчитывали время, синхронизируя события. Его храмовые автоматы по продаже «священной» воды безукоризненно отмеряли нужные порции. Насосы Герона качали воду, подпитывали фонтаны, а пневматические устройства закрывали и открывали двери перед изумленной публикой. Герон был непревзойденным знатоком всевозможных автоматических устройств и механических игрушек. Всего сказанного достаточно, чтобы понять, почему еще при жизни Герона, его, как и прославленного Архимеда (ок. 287–212 до н.э.), соотечественники уважительно величали: «Механик!»

Но Герон был не только прекрасным изобретателем, инженером, механиком, но и превосходным математиком. В его работе «Метрика» даны правила и формулы для вычисления площадей правильных многоугольников, объемов усеченных конуса и пирамиды, шарового сегмента, пяти правильных многогранников и даже тора. Современные школьники хорошо знают формулу Герона из его «Метрики», выражающую площадь треугольника S через длины трех его сторон a , b , c :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ — полупериметр}$$

(эта формула была известна уже Архимеду). Однако не всякий школьник сможет без помощи калькулятора и таблиц рассчитать с высокой точностью значения таких корней, как $\sqrt{2010}$, $\sqrt[3]{2011}$. Это безупречно умел делать Герон: в его «Метрике» мы находим описания эффективных вычислительных процедур для расчета квадратных и кубических корней со сколь угодно высокой точностью. Эти схемы вошли в арсенал инструментальных средств современной вычислительной математики.

В 1814 году обнаружилась находка, проливающая дополнительный свет на деятельность Герона: его сочи-

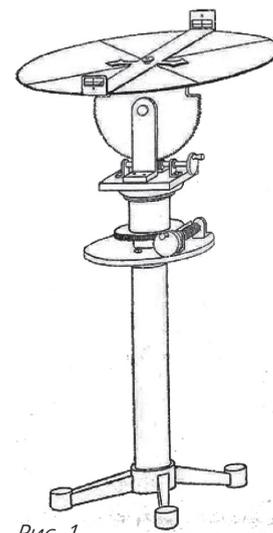
нение «О диоптре». Некоторые комментаторы окрестили это сочинение «пособием по военному делу», увидев в диоптре «прибор для определения высоты стен фортификационных сооружений». Конечно же, скорлупу ореха можно разбивать любым твердым предметом, в том числе и волшебной палочкой, но эта палочка имеет и другие, не столь тривиальные применения. В золотых руках Герона диоптра превращается именно в «волшебный инструмент». В этом несложно убедиться, ознакомившись с фантазиями Герона на тему диоптры, которые мы находим в его сочинении.

Мы приведем несколько фрагментов из сочинения Герона «О диоптре», основываясь на переводе этого труда видным специалистом по античной математике профессором И.Н.Веселовским. Расшифровку его рукописи, хранящейся в архиве ИИЕТ РАН, в «Фонде Веселовского», любезно предоставила доцент МИИТ Галина Александровна Зверкина. Здесь мы изложим фрагменты сочинения Герона в адаптированной форме, облегчающей понимание текста современным читателям.

Что такое диоптра?

На рисунке 1 показана реконструкция диоптры, выполненная Г.Шене (Ф.Даннеман. История естествознания. – М.: Государственное медицинское издательство, 1932).

В верхней части прибора расположена круглая площадка, в плоскости которой вращается так называемая *алидада* – изогнутая на двух концах пластинка. С одной ее стороны в изогнутой части имеется точечное отверстие – *глазной диоптр*, а в другой щель с мушкой или тонким волоском – *предметный диоптр*. При рассмотрении через глазной диоптр мушка или волосок должны проектироваться на визируемую цель – это дости-



гается вращением алидады в одной плоскости, которая, в свою очередь, также может поворачиваться с помощью специального регулирующего винта.

Диоптра позволяла с высокой точностью измерять углы как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскости. Эти две незамысловатые возможности Герон виртуозно использовал для решения огромного множества задач, особо подчеркивая:

... все предложенные нами задачи практически разрешаются одним и тем же самым [прибором]. Однако если кто-нибудь придумал и какие-нибудь другие [задачи], то устроенная нами диоптра не откажется разрешить и их. (Герон. О диоптре, I/Пер. И.Н. Веселовского.)

Недосягаемое становится доступным

Даны две точки, из которых одна вблизи нас, другая же вдали, найти между ними расстояние, не приближаясь к дальней точке. (Там же, VIII.)

На эту задачу, как на типовую, Герон неоднократно ссылается в дальнейшем. Для удобства ссылок назовем ее «Задача 1».

Пусть от точки A требуется найти расстояние до недоступной точки K .

С помощью диоптры отмечается точка B на прямой KA , и под прямым углом к прямой AK проводятся отрезки $AC \perp AK$, $BD \perp BK$ так, что точки K , C , D располагаются на прямой линии (рис. 2).

Поскольку треугольники DBK и CAK подобны, то справедлива пропорция $\frac{BD}{AC} = \frac{BK}{AK}$. Длины отрезков

AC , BD , AB измеряются непосредственно, а длина отрезка AK находится из этой пропорции.

Точка K может быть кораблем в море, камнем на другом берегу реки, вершиной египетской пирамиды – все эти недоступные для непосредственного измерения объекты способ Герона превращает в доступные.

Далеко ли разошлись корабли?

Для двух недоступных точек определить расстояние между ними. (Там же, X.)

Герон предлагает несколько способов решения этой задачи. Рассмотрим один из них.

Определив по спо-

субу задачи 1 расстояния от точки A до двух недоступных точек K и F , откладываем какую-нибудь часть этих расстояний на продолжении прямых KA и FA (рис. 3). Получаем доступный измерению треугольник ACB , подобный треугольнику AFK . Длина отрезка CB составляет известную часть от длины отрезка KF , что и позволяет его найти.

Как высоко дерево?

Определить высоту недоступного дерева. (Там же, XII.)

В решении этой задачи, кроме диоптры высоты d , используется также вспомогательный шест высоты h . Пусть удаление диоптры от дерева равно L (его можно определить по способу, изложенному в задаче 1), а шест отстоит от диоптры на расстоянии l . Визуруется верхушка дерева неизвестной высоты H , как показано на рисунке 4. Поскольку прямоугольные треугольники: больший с катетами L и $H - h$ и меньший с катетами l и $h - d$ подобны, то справедлива пропорция $\frac{H - d}{L} = \frac{h - d}{l}$, откуда определяется H .

Точно такая же пропорция будет иметь место, если L и l обозначают не катеты, а известные гипотенузы – в этом случае можно найти, например, недоступную высоту пирамиды H (рис. 5).

Расстояние до невидимой точки

От данной точки к другой точке, являющейся невидимой, провести при помощи диоптры прямую, каково бы ни было расстояние между ними. (Там же, VII.)

Пусть точки A и B загорожены друг от друга лесным массивом и не находятся на линии прямой видимости (рис. 6). С помощью диоптры проведена вспомогательная ломанная линия, соседние звенья которой расположены под прямым углом друг к другу. Измеренные расстояния вдоль звеньев указаны на рисунке. Определите по этим данным расстояние между точками A и B самостоятельно.

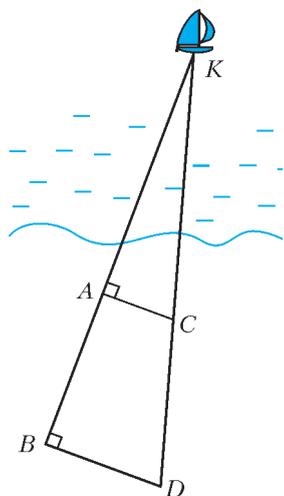


Рис. 2

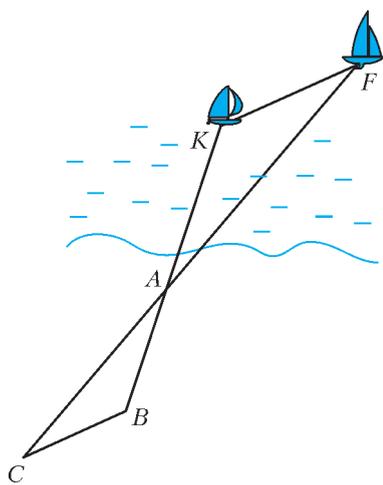


Рис. 3

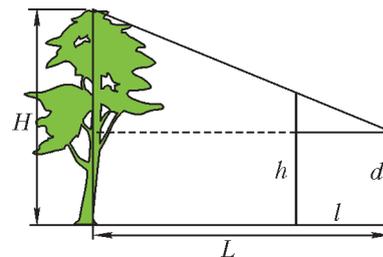


Рис. 4

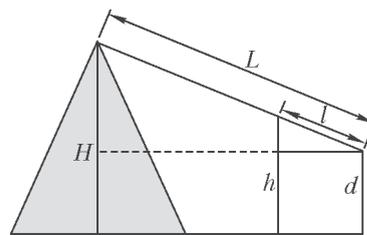


Рис. 5

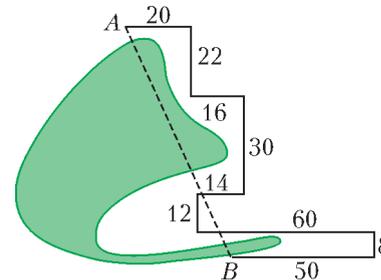


Рис. 6

Площадь недоступного объекта

Измерить данную площадь, не входя на эту площадь или вследствие обилия растительности, или помехи от зданий, или от того, что не допускается в нее входить. (Там же, XXVII.)

Пусть недоступный объект, площадь которого следует определить, задан своим контуром, например выпуклым многоугольником $ABCDEF$ (рис. 7).

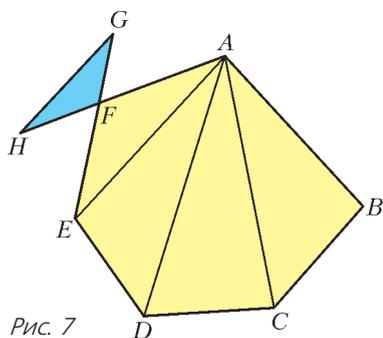


Рис. 7

Мысленно разобьем его на треугольники с общей вершиной A и последовательно определим площадь каждого из них, начиная с треугольника AEF .

Отложим на продолжении стороны AF какую-нибудь ее часть FH , а на продолжении стороны EF – такую же ее часть FG . Тогда треугольник HFG

будет подобен треугольнику AFE . Умножив отрезок HG на коэффициент подобия, узнаем величину недоступного отрезка EA , а умножив площадь треугольника HFG на квадрат коэффициента подобия, найдем площадь недоступного треугольника AFE .

Решение этой задачи Герон заканчивает такой фразой:

Подобно же определим и содержание каждого из остальных треугольников; таким образом возможно определить содержание и всей площади. (Там же, XXVII.)

В сочинении Герона разбираются также и другие задачи, решаемые с помощью диоптры, например:

- *взять глубину данного рва (XIV);*
- *прокопать по прямой [линии] гору при заданных на горе отверстиях туннеля (XV);*
- *к подземному ходу провести в горе шахту, перпендикулярную к ходу (XVI).*

Некоторые историки науки полагают, что в сочинении Герона «О диоптре» изложены правила земельной съемки, фактически основанные на использовании прямоугольных координат.

УШЕЛ ИЗ ЖИЗНИ МАРТИН ГАРДНЕР

22 мая 2010 года не стало Мартина Гарднера.

Нам всем еще только предстоит осмыслить и оценить его гигантскую роль в популяризации науки вообще и математики в частности.

М.Гарднер во многом определил лицо современной занимательной математики, создав жанр, в котором о современных научных задачах рассказывалось на языке «Математических игр» – так назывался раздел в журнале *Scientific American*, редактором которого М.Гарднер был в течение четверти века.

В нашей стране у книг М.Гарднера много почитателей еще и потому, что их переводил Юлий Александрович Данилов – крупный ученый и замечательный стилист, обладавший способностью передать читателю свой собственный интерес к излагаемым сюжетам.

Именно М.Гарднер вернул современным читателям имена тех гигантов, на плечах которых он стоял, – Сэма Лойда и Генри Э.Дьюдени.

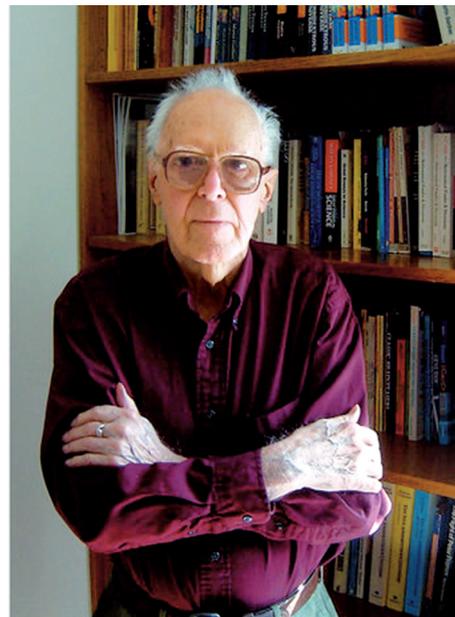
Именно М.Гарднер стал главной опорой моста, через который было организовано небывалое для нашего времени научное взаимодействие между выдающимися учеными (такими, как Дональд Кнут, Джон Конвей или Рональд Грэхем) и рядовыми любителями математики.

Именно М.Гарднер стал человеком, благодаря которому появились сотни тысяч людей, влюбленных в математику.

Другого человека такого масштаба среди популяризаторов математики сейчас нет.

Книги Гарднера на русском языке

1. 1000 развивающих головоломок, математических загадок и ребусов для детей и взрослых.
2. А ну-ка, догадайся!
3. Есть идея!
4. Классические головоломки.



Мартин Гарднер (1914–2010)

5. Крестики-нолики.
6. Лучшие математические игры и головоломки, или Самый настоящий математический цирк.
7. Математические головоломки и развлечения.
8. Математические досуги.
9. Математические новеллы.
10. Математические чудеса и тайны.
11. Нескучная математика.
12. Новые математические развлечения.
13. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам.
14. Путешествие во времени.
15. Теория относительности для миллионов.
16. Этот правый, левый мир.

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2010 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2010» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «M2176» или «Ф2183». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvant.info и phys@kvant.info соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи M2178 и M2179 предлагались на II Математической олимпиаде имени Леонарда Эйлера, задачи M2182 и M2183 – на международной олимпиаде «Romanian Master in Mathematics».

Задачи Ф2183 и Ф2187 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года, задачи Ф2184, Ф2186 и Ф2188 – на заключительном этапе XLIV Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи M2176–M2183, Ф2183–Ф2189

M2176. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N . Докажите, что медианы треугольников ABM , ADN и CMN , проведенные соответственно из вершин B , D и C , пересекаются в одной точке.

Д. Храмцов

M2177. Существует ли такой угол α , что для любого натурального n число $\cos n\alpha$ – рационально, а число $\sin n\alpha$ – иррационально?

В. Сендеров

M2178. В Швамбрании некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причем если какая-то авиакомпания обслуживает линию между городами A и B , то самолеты других компаний между этими городами не летают. Известно, что из каждого города летают самолеты всех трех компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трех компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды.

С. Берлов

M2179. В вершинах куба расставили числа $1^2, 2^2, \dots, 8^2$ (в каждую из вершин – по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений.

Д. Фон-Дер-Флаасс

M2180. Многочлен x^{2010} разделили на многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ с остатком. В качестве неполного частного был получен многочлен $P(x)$. Докажите, что коэффициенты многочлена $P(x)$ положительны.

И. Богданов

M2181*. Даны n бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий. Известно, что каждое из чисел $1, 2, 3, \dots, 2n!$ принадлежит хотя бы одной из прогрессий. Докажите, что каждое целое число принадлежит хотя бы одной из данных прогрессий. Насколько можно уменьшить число $2n!$, чтобы утверждение осталось верным?

Фольклор

M2182. Дан выпуклый четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждого $i = 1, 2, 3, 4$ рассмотрим окружность ω_i , лежащую вне четырехугольника, касающуюся прямых $A_{i-1}A_i$, $A_{i+1}A_{i+2}$ и касающуюся отрезка A_iA_{i+1} в точке T_i (индексы рассматриваются по модулю 4, так что $A_0 = A_4$, $A_5 = A_1$ и $A_6 = A_2$; рис. 1). Докажите, что прямые A_1A_2 , A_3A_4 и T_2T_4 пересекаются в одной точке тогда и только

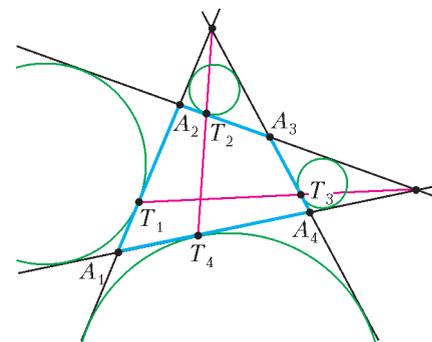


Рис. 1

ко тогда, когда прямые A_2A_3 , A_4A_1 и T_1T_3 пересекаются в одной точке.

П.Кожевников

M2183. Дано натуральное число n . Назовем множество K , состоящее из точек плоскости с целыми координатами, *связным*, если для любых двух точек $R, S \in K$ существуют натуральное число l и последовательность точек $R = T_0, T_1, \dots, T_l = S$, принадлежащих K , такая, что длина любого отрезка вида T_iT_{i+1} равна 1. Для связного множества K обозначим через $\delta(K)$ количество попарно неравных векторов в множестве $\Delta K = \{\overline{RS} \mid R, S \in K\}$. Найдите максимальное возможное значение $\delta(K)$, если K пробегает все связные множества из $2n + 1$ точек плоскости с целыми координатами.

Г.Челноков

Ф2183. На горизонтальном столе лежит на боку однородный конус массой m с радиусом основания R и углом при вершине 2α . Для того чтобы медленно поставить конус на вершину в положение, при котором его ось вертикальна, нужно совершить работу A . Какую минимальную работу нужно совершить для того, чтобы из исходного положения поставить конус на основание?

А.Якута

Ф2184. Однородная цепочка закреплена одним концом на вершине гладкой сферической поверхности радиусом R , длина цепочки $L = \pi R/3$ (рис.2). Верхний конец цепочки освобождают. С каким ускорением (по модулю) будет двигаться сразу после освобождения каждый элемент цепочки? В каком месте цепочки сила натяжения сразу после освобождения будет максимальной?

Рис. 2

Ф2185. В длинном теплоизолированном цилиндрическом сосуде находится некоторое количество криптона (одноатомный газ, его молярная масса $M = 84$ г/моль) при температуре $T = 200$ К и давлении $p = 0,1$ Па. Объем сосуда уменьшают на 1%, быстро сдвигая поршень. Скорость движения поршня $v = 1000$ м/с.

Оцените температуру газа после остановки поршня и установления давления в сосуде.

А.Повторов

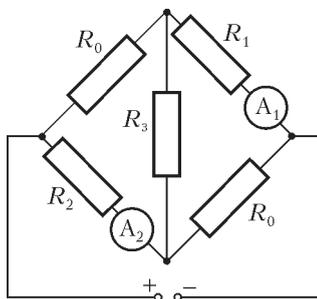


Рис. 3

Ф2186. Электрическая цепь состоит из пяти резисторов и двух идеальных амперметров (рис.3). Сопротивления резисторов R_0 , R_1 и R_2 заданы, а сопротивление R_3

неизвестно. Найдите показание амперметра A_2 , если известна сила тока I_1 , протекающего через амперметр A_1 .

В.Слободянин

Ф2187. Тонкое кольцо радиусом R заряжено зарядом Q , равномерно распределенным по кольцу. Вдоль оси кольца расположена очень длинная непроводящая нить, начинающаяся в его центре и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда γ . Найдите модуль силы электростатического взаимодействия нити с кольцом.

П.Поляков

Ф2188. В свободном пространстве на окружности радиусом R_0 в вершинах вписанного квадрата расположены четыре точечные массы m , две из них несут заряд $+q$, а две другие $-q$ (рис.4). В начальный момент этим материальным точкам сообщают одинаковые по модулю скорости, направленные по касательным к окружности по часовой стрелке. Известно, что достигаемое в процессе движения минимальное расстояние от любой из точечных масс до центра O начальной окружности равно R_1 ($R_1 < R_0$). Считайте, что в любой момент времени заряды находятся в вершинах квадрата с центром в точке O . Действием гравитационных сил можно пренебречь. По какой траектории движется каждая из частиц? Определите время движения частицы из начального положения до положения с расстоянием R_1 от центра окружности.

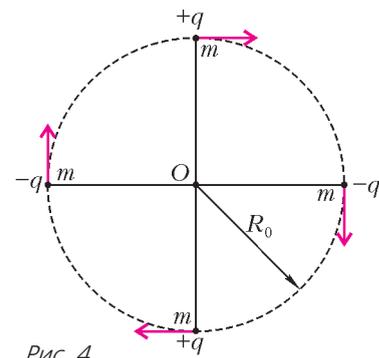


Рис. 4

Х.Матвеев, М.Проскурин

Ф2189. К звуковому генератору (ЗГ) подключена электрическая схема из трех одинаковых резисторов сопротивлением $R = 1$ кОм и трех конденсаторов емкостью $C = 1$ мкФ (рис.5). На какой частоте ЗГ показания амперметра A переменного тока будут минимальны? Сопротивление амперметра считать малым.

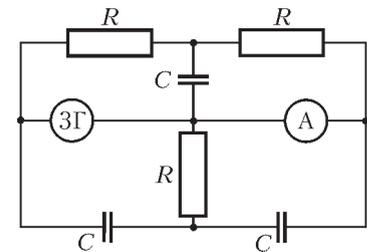


Рис. 5

З.Рафаилов

Решения задач M2154–M2158, M2160, Ф2168–Ф2174¹

M2154. Каждая клетка доски размером 2009×2009 покрашена в один из двух цветов так, что у каждой

¹Решение задачи M2153 приведено в статье И.Богданова «О сумме телесных углов многогранника» в этом номере журнала. Решение задачи M2159 будет опубликовано позже.

клетки соседей (по стороне) своего цвета меньше, чем соседей другого цвета. Какое наибольшее значение может принимать разность между количеством клеток одного и другого цветов?

Ответ: 669.

Докажем вначале, что либо в каждой строке цвета чередуются, либо в каждом столбце цвета чередуются. Из условия следует, что каждая клетка имеет не более

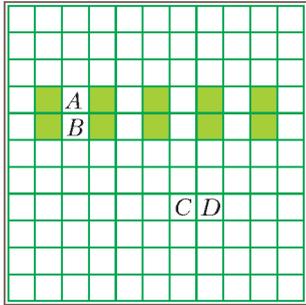


Рис. 1

одного соседа своего цвета. Пусть имеются две соседние одноцветные (скажем, белые) клетки A и B , лежащие в одном столбце (рис.1). Тогда их соседи в строке – другого цвета, скажем зеленые, соседи зеленых – белые и так далее. Получаем, что в строках, содержащих клетки A и B , цвета чередуются. Если, кроме того, имеются две соседние одноцветные клетки C и D , лежащие в одной строке, то получаем, что в столбцах, содержащих клетки C и D , цвета чередуются, что невозможно. Утверждение доказано.

Пусть, для определенности, в каждой строке цвета чередуются. Отделим первый столбец, тогда в оставшейся части доски 2009×2008 зеленых и белых клеток поровну. Первый столбец разобьем на 669 прямоугольников 3×1 и один прямоугольник 2×1 (рис.2). В прямоугольнике 3×1 не может быть трех клеток одного цвета, и такой прямоугольник дает вклад не более 1 в разность R между количеством клеток одного и другого цветов. Прямоугольник 2×1 дает вклад 0 (так как клетки, соседние с угловой, должны иметь цвет, отличный от ее цвета). Таким образом, разность R не превосходит 669.

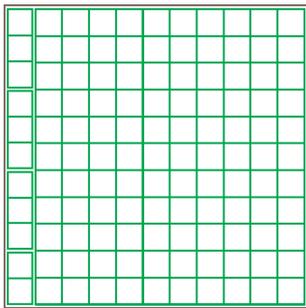


Рис. 2

Опишем пример для $R = 669$. Пусть в каждой строке цвета чередуются, причем строки с номерами вида $3k + 1, k = 0, 1, 2, \dots, 669$ начинаются с зеленой клетки, а остальные строки – с белой (рис. 3). Нетрудно убедиться, что пример удовлетворяет условию задачи.

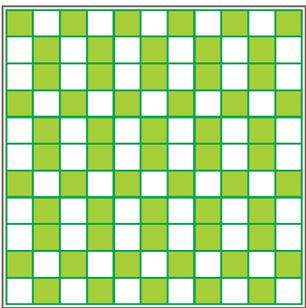


Рис. 3

А.Шаповалов

M2155. Найдите 2009-значное число, отношение которого к сумме его цифр минимально.

Ответ: $10000 \overbrace{99 \dots 9}^{2004}$.

Через $S(X)$ обозначим сумму цифр числа X . Пусть

$A = \overline{a_{2008}a_{2007} \dots a_0}$ – число (или одно из чисел), для которого величина $R(A) = \frac{A}{S(A)}$ принимает наименьшее значение среди всех 2009-значных чисел. Имеем

$$R(A) = \frac{a_{2008}a_{2007} \dots a_{k+1}0a_{k-1} \dots a_0 + 10^k a_k}{S(A)} = 10^k + \frac{1}{S(A)} (a_{2008}a_{2007} \dots a_{k+1}0a_{k-1} \dots a_0 - 10^k (a_0 + \dots + a_{k-1} + a_{k+1} + \dots + a_{2008})).$$

Обозначим разность в скобках через T_k . С одной стороны, T_k не зависит от a_k ; с другой стороны, $T_k = A - 10^k \cdot S(A)$.

Если $T_k > 0$, то $a_k = 9$, иначе после замены a_k на 9 знаменатель дроби $\frac{T_k}{S(A)}$ увеличится, а числитель не изменится, значит, число $R(A)$ уменьшится, что невозможно. Если же $T_k < 0$, то

$$a_k = \begin{cases} 0, & k < 2008, \\ 1, & k = 2008, \end{cases}$$

иначе можно заменить a_k на 0 (или на 1 при $k = 2008$), уменьшая значение $R(A)$.

При $k \leq 2003$ имеем

$$T_k = A - 10^k \cdot S(A) \geq 10^{2008} - 10^k \cdot 9 \cdot 2009 = 10^k (10^{2008-k} - 9 \cdot 2009) > 0;$$

значит, $a_k = 9$ при $k \leq 2003$. Тогда A оканчивается на 2004 девятки, в частности $S(A) > 2004 \cdot 9$. Далее, при $k = 2005, \dots, 2008$ имеем

$$T_k = A - 10^k \cdot S(A) < 10^{2009} - 10^k \cdot 2004 \cdot 9 = 10^k (10^{2009-k} - 2004 \cdot 9) < 0;$$

значит, $a_{2008} = 1$ и $a_{2007} = a_{2006} = a_{2005} = 0$. Тогда $A < 10^{2008} + 10^{2005}$. Наконец, при $k = 2004$ имеем

$$T_{2004} = A - 10^{2004} S(A) < 10^{2008} + 10^{2005} - 10^{2004} \cdot 2004 \cdot 9 = 10^{2004} (10^4 + 10 - 2004 \cdot 9) < 0,$$

поэтому $a_{2004} = 0$.

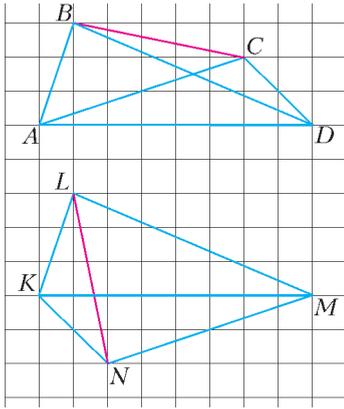
Итак, мы получили, что $10000 \overbrace{99 \dots 9}^{2004}$ – это единственное возможное значение для числа A .

И.Богданов

M2156. Вася и Петя нарисовали по выпуклому четырехугольнику. Каждый из них записал на листочке длины всех сторон своего четырехугольника и двух его диагоналей. В результате на их листочках оказались два одинаковых набора из 6 различных чисел. Обязательно ли четырехугольники Васи и Пети равны?

Ответ: не обязательно.

Примером могут служить четырехугольники $ABCD$ и $KLMN$ с вершинами с узлах квадратной сетки, изобра-



женные на рисунке. Здесь $\triangle ABD = \triangle KLM$, $\triangle ACD = \triangle MNK$ и $BC = LN$, поэтому наборы длин сторон и диагоналей для данных четырехугольников одинаковые. Но очевидно, что сами четырехугольники не равны (так как, например, в четырехугольнике $ABCD$ ни одна из двух диагоналей не равна LN).

И.Богданов

M2157. На доске выписано 20 делителей числа 70!. Докажите, что можно стереть некоторые из них так, чтобы произведение оставшихся являлось полным квадратом.

Имеется всего 19 простых чисел, не превосходящих 70: $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_{19} = 67$. Каждый делитель числа 70! имеет вид

$$d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{19}^{\alpha_{19}}, \quad (*)$$

где α_i – некоторые целые неотрицательные числа. Числу d сопоставим строку $u = (a_1, a_2, \dots, a_{19})$ длины 19 из нулей и единиц по правилу: $a_i = 1$, если α_i нечетно, и $a_i = 0$, если α_i четно. (Например, числу $d = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 11^5 \cdot 13 = p_1^6 \cdot p_2^3 \cdot p_5^5 \cdot p_6^1$ ставится в соответствие строка $(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$).

Введем сложение строк «по модулю 2»: для строк $u = (a_1, a_2, \dots, a_{19})$, $v = (b_1, b_2, \dots, b_{19})$ их сумма равна $u + v = (c_1, c_2, \dots, c_{19})$, где $c_i = 1$, если $a_i + b_i = 1$, и $c_i = 0$, если $a_i + b_i$ равно 0 или 2. Как нетрудно заметить, произведение нескольких чисел вида $(*)$ (не обязательно различных) равно полному квадрату, если сумма соответствующих им строк равна нулевой строке $(0, 0, \dots, 0)$ (в частности, произведение двух чисел равно полному квадрату, если соответствующие им строки одинаковы). Поэтому для решения задачи достаточно доказать следующее утверждение: из 20 строк длины 19 можно выбрать несколько строк, сумма которых равна нулевой строке.

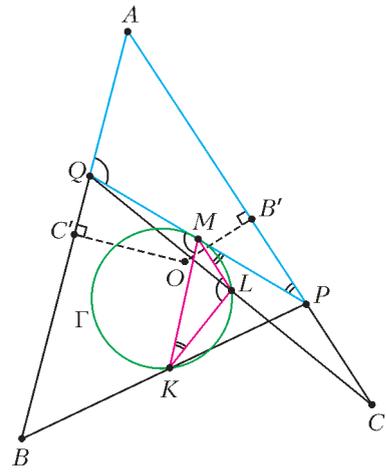
Знакомые с линейной алгеброй могут сразу вывести утверждение из линейной зависимости 20 векторов в 19-мерном векторном пространстве над полем \mathbb{Z}_2 . Мы же приведем комбинаторное доказательство (похожие рассуждения проводились, например, при решении задачи М665).

Для каждого из $2^{20} - 1$ непустых подмножеств множества из 20 строк найдем сумму строк в этом подмножестве. Всего существует 2^{19} строк длины 19 из нулей и единиц, поэтому найдутся два различных подмножества S_1 и S_2 , для которых суммы строк одинаковы. Это означает, что, сложив суммы строк в множествах S_1 и S_2 , мы получим нулевую строку. Удалив из этой суммы строки, встречающиеся дважды (т.е. строки из пересечения множеств S_1 и S_2), получим сумму не-

скольких различных строк, равных нулевой строке.

П.Кожевников

M2158. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABC . Пусть P и Q – внутренние точки отрезков CA и AB соответственно. Точки K, L и M – середины отрезков BP, CQ и PQ соответственно, а Γ – окружность, B проходящая через точки K, L и M . Известно, что прямая PQ касается окружности Γ . Докажите, что $OP = OQ$.



Из параллельности прямых AB и KM следует равенство углов $\angle KMQ$ и $\angle AQP$ (см. рисунок). Аналогично, $\angle LMP = \angle APQ$. Касание окружности Γ и прямой PQ эквивалентно равенству $\angle KLM = \angle KMQ$, или равенству $\angle KLM = \angle AQP$. Аналогично, касание окружности Γ и прямой PQ эквивалентно равенству углов $\angle KLM = \angle APQ$. Таким образом, касание окружности Γ и прямой PQ эквивалентно подобию треугольников APQ и MKL , которое в свою очередь эквивалентно (в силу равенства $\angle CAB = \angle KML$) соотношению $AQ \cdot MK = AP \cdot ML$, или $AQ \cdot OB = AP \cdot PC$ (поскольку MK и ML – средние линии в треугольниках BPQ и CQP соответственно). Последнее соотношение означает, что точки P и Q имеют равные степени относительно окружности, описанной около треугольника ABC , что выполнено тогда и только тогда, когда P и Q равноудалены от центра O .

Замечания

1. Использование свойства степени точки относительно окружности можно заменить следующей выкладкой (далее C' и B' – середины отрезков AB и CA соответственно):

$$\begin{aligned} OP^2 - OQ^2 &= OB'^2 + B'P^2 - OC'^2 - C'Q^2 = \\ &= (OA^2 - AB'^2) + B'P^2 - (OA^2 - AC'^2) - C'Q^2 = \\ &= (AC'^2 - C'Q^2) - (AB'^2 - B'P^2) = \\ &= (AC' - C'Q)(AC' + C'Q) - (AB' - B'P)(AB' + B'P) = \\ &= AQ \cdot QB - AP \cdot PC. \end{aligned}$$

2. Из решения следует, что условие касания равносильно условию равенства отрезков OP и OQ .

С.Берлов

M2160*. Даны попарно различные положительные числа a_1, a_2, \dots, a_n , а также множество M , состоящее из $n - 1$ числа, но не содержащее число $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Кузнечик должен сделать n прыжков вправо по числовой прямой, стартуя из точки с координатой 0. При этом длины его прыжков должны равняться числам a_1, a_2, \dots, a_n , взятым в некотором порядке. Докажите, что этот порядок можно выбрать таким образом, чтобы кузнечик ни разу не

приземлился в точке, имеющей координату из множества M .

Точку на числовой оси условимся отождествлять с ее координатой. Если кузнечик делает последовательно прыжки a_1, a_2, \dots, a_m , обозначим путь кузнечика упорядоченной последовательностью индексов (i_1, i_2, \dots, i_m) . Применим индукцию по n . Случай $n = 1$ очевиден. Предположим теперь, что утверждение задачи верно для количества прыжков, меньшего n . Не умаляя общности, положим $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Пусть d – наименьшее число множества M .

Случай 1: $d < a_n$.

Если $a_n \notin M$, то делаем первый прыжок длиной a_n . Далее, по предположению индукции кузнечик может попасть из точки a_n в точку s , не приземляясь в точках множества $M \setminus \{d\}$, используя прыжки длиной a_1, \dots, a_{n-1} .

Пусть теперь $a_n \in M$. Рассмотрим n попарно непересекающихся подмножеств $\{a_n\}, \{a_1, a_1 + a_n\}, \{a_2, a_2 + a_n\}, \dots, \{a_{n-1}, a_{n-1} + a_n\}$. Найдется одно из них, скажем $\{a_i, a_i + a_n\}$, которое не пересекается с M . Тогда делаем первые два прыжка длиной a_i и a_n . При этом хотя бы две точки из M (d и a_n) левее точки $a_i + a_n$, в которую кузнечик попал за два прыжка. По предположению индукции, кузнечик может попасть из точки $a_i + a_n$ в точку s , не приземляясь в точках множества $M \setminus \{d\} \cup \{a_n\}$ и используя все прыжки, кроме a_i и a_n .

Случай 2: $d \geq a_n$.

По предположению индукции, кузнечик может попасть из точки a_n в точку s , не приземляясь в точках множества $M \setminus \{d\}$, используя прыжки a_1, \dots, a_{n-1} ; пусть (i_1, \dots, i_{n-1}) – перестановка индексов $1, 2, \dots, n-1$, соответствующая этому пути. Если при этом кузнечик также не приземляется в точке d (в частности, в таком случае $d > a_n$), то последовательность индексов (n, i_1, \dots, i_{n-1}) дает искомым путь кузнечика.

В противном случае в пути (n, i_1, \dots, i_{n-1}) кузнечик приземлился ровно в одной точке множества M – точке d , и мы получаем, что $a_n + a_{i_1} + \dots + a_{i_k} = d$ для некоторого $0 \leq k < n-1$. Тогда рассмотрим путь $(i_1, \dots, i_{k+1}, n, i_{k+2}, \dots, i_{n-1})$. Так как $a_{i_1} + \dots + a_{i_{k+1}} < a_{i_1} + \dots + a_{i_k} + a_n = d$, то кузнечик не приземлится на точки множества M при первых $k+1$ прыжках. На протяжении оставшейся части пути он приземляется на те же точки, что и в пути (n, i_1, \dots, i_{n-1}) (и координаты этих точек не меньше чем $a_{i_1} + \dots + a_{i_{k+1}} + a_n > d$). Таким образом, в пути $(i_1, \dots, i_{k+1}, n, i_{k+2}, \dots, i_{n-1})$ кузнечик не приземлится ни на одну точку из множества M .

Итак, мы нашли нужный путь кузнечика во всех случаях.

Замечание. А.Комисарски (Польша) отметил, что утверждение неверно, если позволить длинам прыжков быть также отрицательными (и считать прыжок влево на $a > 0$ прыжком вправо на $-a$). Скажем, если длины прыжков равны $-1, 1, 2, 3$, а $M = \{1, 2, 3\}$, то, как легко видеть, нужного пути кузнечика в точку 5 не существует.

И.Богданов

Ф2168. На Венере странная атмосфера – она простирается до высоты 10 км и обладает практически постоянной плотностью. Отпускаем мячик с высоты 5 м – он упадет на поверхность через 1 секунду. С высоты 50 м он падает 3,5 с, с высоты 100 м – 5,5 с. Сколько времени он будет падать с высоты 200 м? Оцените, с какой скоростью он движется в этом случае непосредственно перед падением.

Честным способом тут посчитать ничего не получится. Но посмотрим на опыт 2: первые 5 метров займут 1 секунду, значит, остальные 45 м мяч падает 2,5 с – средняя скорость на этом участке получается 18 м/с. Теперь опыт 3: первые 50 м из 100 м мяч пролетает за 3,5 с, остальные 50 м – за 2 с. За эти последние 2 секунды средняя скорость составит 25 м/с. Ясно, что при этом ускорение намного меньше 10 м/с² (опыт 1). Можно скорость 25 м/с считать установившейся, можно немного уточнить эту оценку – если положить, что сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости, то нужно еще немного увеличить значение установившейся скорости, получится примерно 29 м/с. Если не уточнять установившуюся скорость, то время падения с высоты 200 м будет равно $5,5 \text{ с} + 100 \text{ м} / 25 \text{ м/с} = 9,5 \text{ с}$, а скорость падения около поверхности будет 25 м/с. Если уточнить, то время падения составит $5,5 \text{ с} + 100 \text{ м} / 27 \text{ м/с} = 9,2 \text{ с}$, а скорость у поверхности будет 29 м/с.

А.Простов

Ф2169. На гладком горизонтальном столе находится груз массой M , к нему привязаны легкие нити, к свободным концам нитей прикреплены грузы массами $2M$ и $M/2$. Нити переброшены через неподвижные, расположенные горизонтально пальцы так, что один кусок каждой нити горизонтален, а другой – вертикален. Вначале груз на плоскости удерживают, затем отпускают. При этом пальцы начинают двигаться навстречу друг другу по горизонтали, каждый с ускорением $a = g/7$. Найдите ускорение груза массой M сразу после начала движения.

Обозначим силу натяжения конца нити, привязанного к грузу массой $2M$, буквой T . Трения нет – поэтому сила натяжения горизонтального куска этой нити тоже T . Аналогично, силу натяжения нити с другой стороны обозначим Q . Ускорение груза массой M направлено в сторону большего из грузов, обозначим его буквой b . Тогда ускорение груза массой $2M$ сразу после начала движения будет направлено вниз и составит $b + a = b + g/7$, а ускорение груза массой $M/2$ будет направлено вверх и составит $b - g/7$ (если эта величина получится отрицательной, а заранее это угадать не слишком просто, ничего пересчитывать не придется). Ускорения грузов записаны с учетом нерастяжимости кусков нитей. В самом начале движения ускорения свисающих грузов будут вертикальны, затем свисающие куски нитей перестанут быть вертикальными, так что задачу нужно решать очень быстро!

Запишем уравнения движения для всех трех грузов:

$$\begin{aligned} 2Mg - T &= 2M(b + g/7), \\ Q - 0,5Mg &= 0,5M(b - g/7), \\ T - Q &= Mb. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений (просто сложив эти три выражения), получаем

$$b = \frac{18}{49}g.$$

Р.Пальцев

Ф2170. В два стакана налили одинаковые количества воды – в первый горячую при $+70^\circ\text{C}$, во второй холодную при $+20^\circ\text{C}$. Ложку горячей воды перелили в холодную и перемешали. Температура воды в этом стакане оказалась $+25^\circ\text{C}$. Перелили ложку этой воды обратно в стакан с горячей водой и перемешали. Какой стала температура в горячем стакане? Сколько раз нужно повторить этот процесс (переливание туда и обратно с перемешиванием), чтобы разность температур стала меньше одного градуса? Теплоемкостью стакана и ложки можно пренебречь. Теплообмен с окружающей средой не учитывать.

После первого переливания ложки воды обратно в горячий стакан температура воды в нем установится $+65^\circ\text{C}$ (количество воды вернулось к начальному, общая энергия обоих стаканов не изменилась).

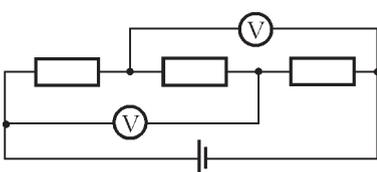
Теперь разность температур воды в стаканах уменьшилась от начальных 50 градусов до 40 градусов, т.е. уменьшилась в 1,25 раз. Ясно, что после следующего переливания туда-обратно разность температур уменьшится еще в 1,25 раз (это очевидно, но можно и легко доказать – при помощи уравнения теплового баланса). После n пар переливаний разность температур уменьшится в $(1,25)^n$ раз. Нужно найти такое число n , чтобы полученное выражение оказалось больше 50, при этом разность температур окажется меньше 1 градуса. Можно использовать логарифмы, можно просто «на числах» убедиться (числа здесь несложные), что $(1,25)^{17}$ меньше 50, а $(1,25)^{18}$ – больше.

Итак, нужно совершить 18 пар переливаний.

А.Повторов

Ф2171. Три одинаковых резистора соединены последовательно, батарейка напряжением 6 В подключена к концам этой цепочки. Два одинаковых вольтметра подключены так, как показано на рисунке. Один из приборов показывает 3 В. Что показывает второй прибор? Что он будет показывать, если первый вообще отключить от схемы? Показания приборов считать точными, вольтметры – неидеальными.

В силу симметрии схемы, сразу можно сказать, что второй вольтметр тоже покажет 3 В, а ток через средний резистор не течет. Ясно, что сопротивление



вольтметра такое же, как сопротивление одного резистора.

Если отключить один вольтметр, то получится простая схема,

где один резистор подключен последовательно с вольтметром, включенным параллельно с двумя последовательно соединенными резисторами. Тогда показание вольтметра будет 2,4 В.

З.Приборов

Ф2172. В глубинах космоса, вдали от всех других тел, висит неподвижно тонкостенная непроводящая сфера радиусом R и массой M . На ее поверхности равномерно «размазан» заряд Q . Издали на сферу налетает очень маленький шарик массой m , заряженный таким же зарядом Q . Начальная скорость шарика равна v_0 и направлена в центр сферы, а в стенках сферы сделаны две маленькие дырки так, чтобы шарик, при большой его скорости, мог проскочить сквозь сферу. Сколько времени шарик летит внутри сферы?

Поле зарядов, расположенных на сфере, внутри самой сферы отсутствует, поэтому внутри сферы шарик летит равномерно. (Если бы сфера была проводящей, ее заряды перераспределились бы, и движение заряженного шарика внутри сферы уже не было бы равномерным.) Для нахождения времени пролета достаточно определить скорость шарика – проще всего ее найти в тот момент, когда шарик находится в центре сферы (проще считать потенциалы). Обозначив скорость шарика в этой точке через v , а скорость центра сферы в этот же момент – через u , запишем уравнения законов сохранения импульса и энергии:

$$mv_0 = mv + Mu, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} + \frac{kQ^2}{R}.$$

Решая эти уравнения, найдем v и u :

$$v = \frac{v_0(1 + \gamma A)}{1 + \gamma}, \quad u = \frac{v_0(1 - A)}{1 + \gamma},$$

где

$$\gamma = \frac{M}{m}, \quad A = \sqrt{1 - \frac{2kQ^2(1 + \gamma)}{Rm\gamma v_0^2}}.$$

Знаки в корнях квадратного уравнения выбраны так, чтобы скорость шарика оказалась больше скорости центра масс системы, а скорость сферы – меньше. После того как шарик попадает внутрь сферы, скорости тел не изменяются, пока шарик не вылетит наружу. Поэтому условие «пролета» находится просто: «критическая» скорость v_0 соответствует условию $A = 0$, т.е.

$$v_{0\text{кр}}^2 = \frac{2kQ^2(1 + \gamma)}{Rm\gamma}.$$

Итак, время пролета шарика внутри сферы равно

$$\tau = \frac{2R}{v - u} = \frac{2R(1 + \gamma)}{v_0(1 + A)}.$$

З.Рафаилов

Ф2173. Пружинный маятник состоит из легкой пружины жесткостью k и висящего на ней груза массой M . Вначале система неподвижна (груз в равновесии). В некоторый момент точку подвеса начинают дви-

(Продолжение см. на с. 34)

...прыгают в медных сосудах самофракийские кольца с железа опилками вместе, бурно бушуя, когда под сосудом камень магнитный...

Тит Лукреций Кар

Янтарь не притягивает к себе соломинку, когда что-либо их разделяет, притяжение железа к магниту не испытывает аналогичных помех.

Джероламо Кардано

...в конце концов мне удалось намагнитить и наэлектризовать луч света и осветить магнитную силовую линию.

Майкл Фарадей

И вот тогда я задал сам себе вопрос — а что будет, если среда, в которой распространяется волна, будет иметь одновременно отрицательные значения и электрической, и магнитной проницаемости?

Виктор Веселаго

...наша хваленая современная физика — сплошное надувательство: начали мы с магнитного железняка и янтаря, а закончили тем, что не понимаем достаточно хорошо ни того, ни другого. Зато в процессе изучения мы узнали огромное количество удивительных и очень полезных для практики вещей!

Ричард Фейнман

А так ли хорошо знакомы вам ПОСТОЯННЫЕ МАГНИТЫ?

А как же! Взглянем вокруг — вот они на дверце холодильника в прилипших к ней игрушках, на столах в «ловушках» скрепок, булавок и кнопок, в магнитных лентах пластиковых карт или хотя бы в тех же компасах, которые вставляют уже и в школьные ранцы, и в ремешки часов. Чуть подумав, вспомним, что без магнитов не обходятся магнитофоны, микрофоны, телефоны — это нам подсказывают не успевающие за временем учебники. А чем начинают сегодня разного рода аппаратуры? Магнитов в классическом понимании там может уже и не содержаться, но это не значит, что в устройствах, которыми мы повседневно пользуемся, перестали применять магнитные материалы. Просто они неузнаваемо изменились, порой став практически невидимыми, но главное — приобрета совершенно новые, особенные качества.

Однако в переключке времен, возникшей в эпиграфах, пожалуй, заметно и нечто общее — неизменное повышенное внимание к этому удивительному явлению природы. Размышления о магнитах можно найти и у древних философов, и у средневековых естествоиспытателей, и у наших современников-исследователей. Когда-то в магнит умудрились вдохнуть «душу» и уподобляли его живым организмам; сегодня пытаются раскрыть загадку магнитного монополя и объяснить необычные свойства создаваемых в лабораториях магнитных материалов.

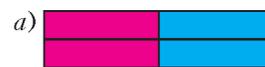
В какой-то мере этот «Калейдоскоп» — продолжение предыдущего выпуска «Нано...» И так же, как в прошлый раз, мы попробуем перекинуть мостик от, казалось бы, бесхитростных ситуаций и задач, где мы встречаемся с нашими персонажами-магнитами, к тем зачастую ошеломляющим технологическим новинкам, где они продолжают играть заметную, если не определяющую роль, меняя облик окружающего нас мира.

Вопросы и задачи

1. Может ли стальной стержень иметь на обоих концах одинаковые магнитные полюса? Может ли постоянный магнит иметь четное число магнитных полюсов? А нечетное число?

2. Два одинаковых прямолинейных магнита соединили один раз так, как показано на рисунке а), другой раз — как показано на рисунке б).

Изобразите линии индукции магнитного поля в каждом случае.



3. Будет ли действовать магнит на магнитную стрелку, если между ними поместить руку? А если алюминиевый лист?



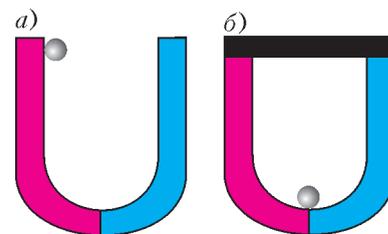
4. На лист бумаги равномерно насыпают металлические опилки. Этот лист помещают в магнитное поле. Если слегка постучивать по листу, то опилки расположатся в цепочки по направлению магнитных линий. Для чего необходимо постучивать по листу? Почему опилки выстраиваются в цепочки?

5. Имеются два одинаковых стальных стержня, один из которых намагничен сильнее другого. Как найти этот стержень?

6. Полосовой магнит распилили на несколько кусков одинаковой длины. Какой из получившихся кусков окажется намагниченным сильнее: который находился ближе к концам или ближе к середине магнита?

7. Полосовой магнит разделили на две равные части и получили два магнита. Будут ли эти магниты оказывать такое же действие, как и целый магнит?

8. Зачем при хранении дугообразного магнита его концы соединяют железным бруском (якорем)?



9. Сильный дугообразный магнит способен удерживать стальной шарик. Почему шарик не удерживается на прежнем месте, если магнит замкнуть якорем?

10. Сильный магнит может удерживать на весу гирлянду из нескольких железных цилиндров. Что будет происходить, если снизу приближать к гирлянде такой

же магнит, обращенный к верхнему одноименным полюсом? А если противоположным?

11. Три совершенно одинаковые магнитные стрелки расположены в вершинах равностороннего треугольника, сторона которого много больше длины стрелки. Стрелки могут вращаться вокруг осей, перпендикулярных плоскости треугольника. Каково положение равновесия стрелок, если всеми влияниями, а также магнитным полем Земли можно пренебречь?

12. Почему ударами молотка можно размагнитить стальной магнит, а легким постукиванием по стальному стержню можно, наоборот, способствовать его намагничиванию?

13. Отчего обыкновенные магнитные компасы вблизи полюсов Земли работают очень плохо?

14. Уравновешенные весы со стальным коромыслом располагаются вдоль земного меридиана. Сохранится ли равновесие, если коромысло намагнитить вдоль всей его длины?

15. Можно ли на Луне ориентироваться с помощью магнитного компаса?

16. Многие вещества сохраняют свои магнитные свойства и после испарения. А почему атомы железа в парообразном состоянии теряют ферромагнитные свойства?

17. Намагниченная стальная пластинка, опущенная в сосуд с соляной кислотой, растворилась. Куда девалась магнитная энергия пластинки?

Микроопыт

Возьмите большую магнитную стрелку на подставке и поднесите ее сначала к нижнему, а затем к верхнему концу школьного лабораторного штатива (варианты: к железному ведру, к железной ручке двери). Одинаково ли будет вести себя стрелка у разных концов штатива? Почему?

Любопытно, что...

...древнейшие сведения об использовании железа в качестве компаса содержатся в китайских летописях, составленных более трех тысячелетий назад. Название же «магнит», как свидетельствует древнегреческий философ Платон, ввел почти за пятьсот лет до новой эры автор знаменитых трагедий Еврипид.

...столетиями от поколения к поколению передавались фантастические небылицы о свойствах магнита. Так, связывая необычайную для неживой природы силу магнита с происками дьявола, считали, что он помогает ворами, открывая запоры и замки, что магнит ночью «спит» и потому бездействует, что влияние магнита прекратится, если натереть его чесноком, а если он потеряет свою силу, следует смочить его козлиной кровью.

...в своем фундаментальном труде «О магните...» Гильберт впервые высказал утверждение о том, что Земля — большой магнит.

...подковообразную форму придал магнитам Даниил Бернулли; связь ударов молний с перемагничиванием судовых компасов, а также влияние магнитных бурь на полярные сияния установил Доминик Араго; научную программу по изучению магнитных явлений, которой фактически следовали ученые XIX века, разработал, но, увы, не опубликовал Генри Кавендиш.

...пытаясь найти взаимосвязь между различными областями физики, Фарадей обнаружил вращение плоскости колебаний линейно поляризованного света, распространяющегося в веществе вдоль постоянного магнитного поля. Магнитооптический эффект Фарадея, реализуемый сегодня в тонких пленках, оказался незаменим при изучении свойств магнитных доменов, при проверке подлинности видео- и аудиозаписей, а также при расшифровке «черных ящиков».

...гипотеза о существовании в ферромагнетиках областей самопроизвольной намагниченности — доменов — была выдвинута французским физиком Пьером Вейсом в 1907 году и получила подтверждение 12 лет спустя в эффектном опыте. Перемагничивание доменов микронных размеров с помощью изобретенного к тому времени электронного усилителя сигналов удалось преобразовать в щелчки, слышимые по всей лаборатории. А уже в 1932 году магнитные домены наблюдались непосредственно в микроскоп.

...хотя полюса магнитов неразделимы, гипотеза о существовании магнитных монополей не противоречит теории, очень многие их свойства исследованы «на бумаге», а поиски монополей не прекращаются как в космосе, так и в земных экспериментах.

...Нобелевская премия по физике 2007 года была присуждена за разработку технологии, значительно увеличившей плотность хранения информации на жестких дисках. В ее основе — открытие гигантского магнитосопротивления в так называемых «сэндвичах», состоящих из двух слоев ферромагнитного материала, разделенных тончайшей прослойкой немагнитного материала. Этот эффект стал первым практическим применением нанотехнологии в современной электронной промышленности.

...в последние годы физикам удалось создать «суперлинзы», собирающие световые лучи в гораздо более узкий пучок, чем это разрешается законами оптической дифракции, что позволило различать точки, расположенные всего в нескольких десятках нанометров друг от друга. Метаматериалы, применяемые при изготовлении «суперлинз», имеют отрицательный показатель преломления, т.е. представляют собой «левые» оптические среды, в которых диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость отрицательны.

Что читать в «Кванте» о постоянных магнитах

(публикации последних лет)

1. «Калейдоскоп «Квант» — 2005, №1, с.32;
2. «Левые среды» — 2006, Приложение №2, с.62;
3. «Движение заряда в магнитном поле» — 2007, №5, с.42;
4. «Триумф фундаментальной науки» — 2008, №4, с.4;
5. «Загадки магнитной стрелки» — 2009, №3, с.39; №5, с.34;
6. «Магнитные домены» — 2009, Приложение №4, с.44;
7. «Как управлять светом с помощью магнитного поля» — 2010, №1, с.12;
8. «Постоянные магниты. Магнитные свойства вещества» — 2010, Приложение №1, с.63.

Материал подготовил А.Леонович

(Начало см. на с. 26)

гать вниз с постоянной скоростью v_0 . Найдите максимальную длину пружины при таком движении. В нерастянутом состоянии пружина имеет длину L .

В начальный момент пружина растянута на $l = \frac{Mg}{k}$ и энергия деформации пружины равна $\frac{kl^2}{2} = \frac{M^2g^2}{2k}$.

Пусть максимальное растяжение пружины равно X , тогда энергия пружины в этом состоянии составляет $\frac{kX^2}{2}$. Удобно перейти в систему отсчета, которая едет вниз со скоростью v_0 . В этой системе точка подвеса неподвижна, работа силы, действующей на подвес со стороны пружины, равна нулю и энергия окружающих тел не меняется. Максимальное растяжение пружины соответствует нулевой скорости груза, а начальная скорость груза в этой системе равна v_0 . Закон сохранения механической энергии имеет вид

$$\frac{Mv_0^2}{2} + \frac{M^2g^2}{2k} + Mg(X-l) = \frac{kX^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$X = \frac{Mg}{k} + \sqrt{\frac{Mv_0^2}{k}}.$$

Можно записать и условие для скорости – при большой скорости v_0 может получиться $X > L$ и пружина не все время будет подчиняться закону Гука (груз ударится о подвес).

Итак, максимальная длина пружины равна

$$L_{\max} = L + X = L + \frac{Mg}{k} + \sqrt{\frac{Mv_0^2}{k}}.$$

А.Зильберман

Ф2174. Очень большое количество одинаковых тонких собирающих линз с фокусным расстоянием F расположены на одинаковых расстояниях l друг от друга так, что главные оптические оси всех линз совпадают. Расстояние l много меньше фокусного расстояния F . На первую линзу перпендикулярно ее плоскости падает

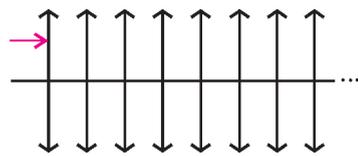


Рис. 1

луч света (рис.1). Постройте ход этого луча. Найдите расстояние между точками, в которых луч в третий и в четвертый раз пересекает главную оптическую ось.

Аналогичная задача уже публиковалась в «Задачнике Кванта» (Ф193), однако была поставлена лишь на качественном уровне: нужно было построить ход ряда лучей в рассматриваемой системе линз. Повторим сначала основные моменты решения этой задачи.

Так как линзы собирающие, каждая будет «прижимать» луч к главной оптической оси. Причем, поскольку

ку фокусное расстояние линз много больше расстояния между ними, а луч после прохождения линзы пересек бы главную оптическую ось на таком расстоянии от линзы, которое сравнимо с ее фокусным расстоянием, между каждой парой линз луч будет смещаться очень незначительно. Поэтому после прохождения первой линзы луч чуть-чуть «повернет» к главной оптической оси, после прохождения второй – еще чуть-чуть, затем еще и в какой-то точке, пройдя большое количество линз, пересечет главную оптическую ось, повернув при этом на значительный угол за счет преломлений в большом количестве линз. После этого луч будет снова «поворачивать» к главной оптической оси и на каком-то расстоянии от точки пересечения станет параллельным главной оптической оси. Дальнейший ход луча будет повторять описанный выше.

Для иллюстрации этого вывода на рисунке 2 построен ход трех лучей, падающих на рассматриваемую систему линз. Лучи построены с помощью расчетов для

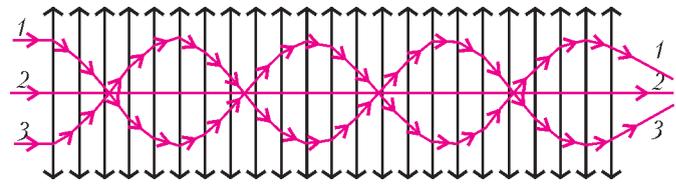


Рис. 2

случая, когда расстояние между линзами равно одной трети фокусного расстояния линз. Из этого рисунка видно, что, с одной стороны, лучи 1 и 3 представляют собой ломаные линии (ведь между линзами лучи прямые), но с другой стороны, уж очень они похожи на графики тригонометрических функций! Поэтому возникает следующая идея. Будем считать, что луч описывается «почти» плавной кривой, и попробуем получить ее уравнение.

Введем систему координат с началом в центре первой линзы, ось X направим вдоль главной оптической оси, ось Y перпендикулярно ей и в пределе $l \rightarrow 0$ найдем связь между координатами y и x для точек луча, т.е. получим уравнение $y(x)$, описывающее луч. Для этого рассмотрим прохождение луча через одну линзу, находящуюся на некотором расстоянии x от начала координат (рис.3). Пусть луч AB падает на линзу под углом α к главной оптической оси в точке B , имеющей вертикальную координату y (отрезок BM параллелен главной оптической оси линзы). Построим продолжение этого луча после прохождения линзы и найдем угол β между ним и главной оптической осью. Для построения проведем через центр линзы вспомогательный луч CO , параллельный падающему. Из прямоугольного треугольника BMN имеем

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{MN}{F} = \frac{y}{F} + \frac{F \operatorname{tg} \alpha}{F} = \operatorname{tg} \alpha + \frac{y}{F}.$$

Тангенс угла наклона луча к оси X равен производной искомой функции $y(x)$ со знаком «минус» (углы α и β отсчитаны по часовой стрелке от оси X), поэтому предыдущее равенство можно переписать в виде

$$y'(\text{после линзы}) - y'(\text{до линзы}) = -\frac{1}{F} y(x).$$

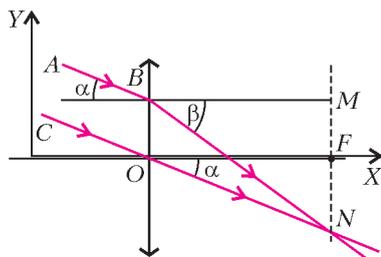


Рис. 3

Поделим правую и левую части этого уравнения на расстояние l между линзами. Поскольку это расстояние мало, левая часть нового уравнения будет приближенно равна второй производной искомой

функции в точке, где находится линза, т.е. $y''(x)$. Тогда получим

$$y''(x) = -\frac{1}{lF} y(x).$$

Из этой формулы следует, что функция $y(x)$, определяющая ход луча в рассматриваемой системе линз, такова, что ее вторая производная в некоторой точке пропорциональна самой функции в этой точке. Уравнения, которые связывают неизвестную функцию и ее производные, являются дифференциальными уравнениями. В школьном курсе физики рассматривается дифференциальное уравнение гармонических колеба-

ний, которые связывает координату колеблющегося тела x со временем t :

$$x''(t) = -\omega^2 x(t),$$

где ω^2 – некоторое число, и доказывается, что функция $x(t)$ представляет собой комбинацию синуса и косинуса от аргумента ωt , т.е. является периодической функцией времени с периодом $T = 2\pi/\omega$.

Поскольку наше уравнение для функции $y(x)$ совпадает по форме с уравнением гармонических колебаний, причем $\omega^2 = \frac{1}{lF}$, то искомая функция $y(x)$, определяющая ход светового луча, также представляет собой комбинацию тригонометрических функций координаты x с периодом $L = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{lF}$. Здесь период L имеет смысл длины, на которой световой луч дважды пересекает ось X . Поэтому расстояние между ближайшими точками пересечения лучом главной оптической оси, и в частности между третьим и четвертым пересечениями, равно половине этого периода, т.е. $\pi\sqrt{lF}$.

С.Муравьев

Еще раз об окружностях, вписанных в криволинейные фигуры

В задаче М2127 «Задачника «Кванта»» внутри ветви гиперболы вписывалась цепочка окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ так, что при каждом $n > 1$ окружность ω_n касается ветвей гиперболы и окружности ω_{n-1} . В решении этой задачи мы упомянули интересные факты об аналогичных цепочках окружностей, вписанных в эллипс или в параболу.

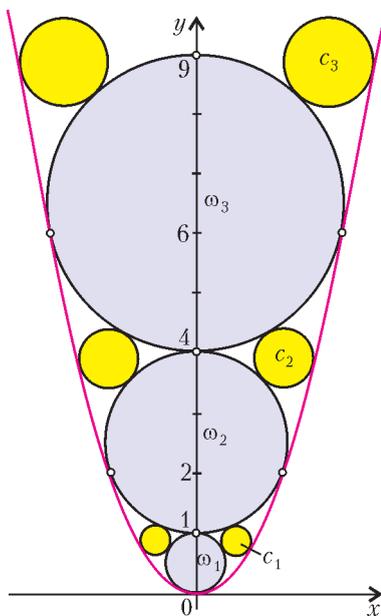


Рис. 1

Например, если внутри параболы $y = x^2$ расположить цепочку касающихся окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ так, что ω_1 касается параболы в ее вершине и радиус ω_1 равен $1/2^1$, то радиус ω_n равен $n - \frac{1}{2}$ – это задача М.Евдокимова со Всероссийской олимпиады 1998 года. А что получится, если продолжить вписывать окружности в образовавшиеся криволинейные треугольники (рис.1)? Итак, пусть окружность c_1 касается ω_1, ω_2 и параболы, окружность c_2 ка-

сается ω_2, ω_3 и параболы и т.д. Оказывается, радиус c_n равен $n/4$ (а центр и точка касания с параболой имеют ординаты $n^2 - \frac{1}{8}$ и $n^2 - \frac{1}{4}$ соответственно).

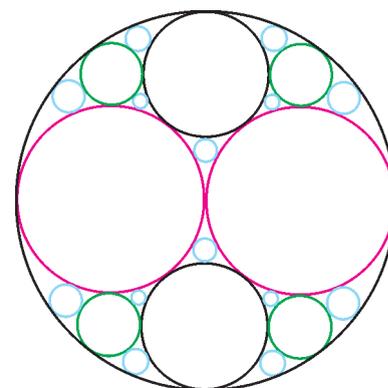


Рис. 2

Рассмотрим еще одну ситуацию: в окружность радиуса 1 впишем две касающиеся между собой окружности радиуса $1/2$. Затем впишем окружности, касающиеся внутренним образом окружности радиуса 1 и внешним образом окружностей радиуса $1/2$. Процесс вписывания продолжим: в криволинейный треугольник между любыми тремя окружностями вписываем окружность (рис.2). Можно доказать, что радиусы всех окружностей из описанного бесконечного множества равны числам вида $1/n$, где n – натуральное.

Аналогичную конструкцию рассмотрим в пространстве: в сферу радиуса 1 впишем две касающиеся между собой сферы радиуса $1/2$. Далее впишем сферу, касающуюся внутренним образом сферы радиуса 1 и внешним образом сфер радиуса $1/2$. Процесс вписывания продолжим: между любыми четырьмя сферами вписываем сферу. Оказывается, радиусы всех полученных сфер тоже равны числам вида $1/n$.

Мы предлагаем читателю доказать и, возможно, обобщить предложенные факты (в основе доказательства последних двух фактов лежит формула Содди, связывающая радиусы четырех попарно касающихся окружностей или пяти попарно касающихся сфер, – см. например, книгу: В.В.Прасолов, В.М.Тихомиров. *Геометрия*. – М.: МЦНМО, 2007. – Задача 1.21, а). А может быть, вам удастся сделать другие интересные наблюдения, связанные с касанием окружностей.

В.Расторгуев

¹ Заметим, что значение радиуса для ω_1 выбрано не случайно. Дело в том, что радиус кривизны параболы $y = x^2$ в ее вершине равен $1/2$. Подробнее о радиусе кривизны можно прочитать, например, в книге: В.Г.Болтянский. *Огибающая*. – Серия «Популярные лекции по математике». – М.: Физматлит, 1961.

Задачи

1. Вдоль реки расположены пристани *A, Б, В, Г* (именно в таком порядке). От *В* до *A* теплоход плывет 1 час, от *В* до *Г* — тоже 1 час, а от *Б* до *Г* — 2 часа. В какую сторону течет река — от *A* к *Г* или от *Г* к *A*?

О.Иванова

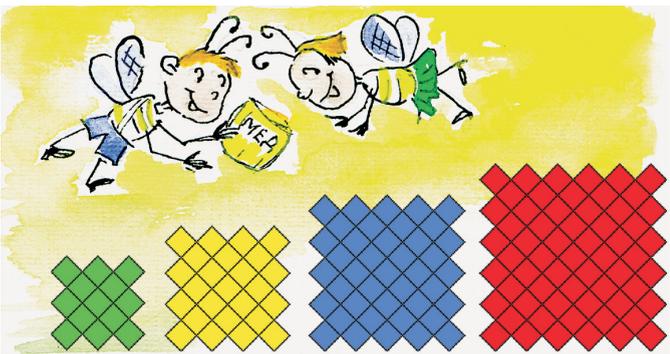


2. Отметьте на листе бумаги две красные, две желтые и две зеленые точки и соедините их отрезками так, чтобы получилось пять равносторонних треугольников с разноцветными вершинами.

Э.Лемонтаренко



3. Все фигуры, изображенные на рисунке, составлены из нескольких квадратиков. Иногда такие фигуры



Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 — 8 классов.

называют ступенчатыми квадратами. Докажите, что число квадратиков в каждом ступенчатом квадрате равно сумме двух квадратов натуральных чисел.

Н.Авилов

4. Барон Мюнхгаузен утверждает, что произведения

$1\frac{1}{10} \cdot 1\frac{1}{11} \cdot \dots \cdot 1\frac{1}{98} \cdot 1\frac{1}{99}$ и $1\frac{1}{100} \cdot 1\frac{1}{101} \cdot \dots \cdot 1\frac{1}{998} \cdot 1\frac{1}{999}$ — целые числа, причем их отношение тоже целое. Не ошибается ли барон?

Г.Гальперин



5. Штаб математиков состоит из нескольких комнат, соединенных коридорами по кругу. В каждой комнате стоит доска. Шпион проник в одну из комнат, имея при себе запас мела. Как ему определить количество комнат в штабе, если он может ходить по комнатам здания, писать мелом на доске и стирать с доски? (Изначально на досках могло быть что-нибудь написано; шпион не может выносить доску из комнаты.)

М.Прасолов



Иллюстрации Д.Гришуковой

Хорошо темперированный клавир

И. ГЕЛЬФАНД, А. ШЕНЬ

ВСЕ ЗНАЮТ, ЧТО ОДНУ И ТУ ЖЕ МЕЛОДИЮ МОЖНО играть в разных тональностях. Но что означают слова «одну и ту же»? Чтобы ответить на этот вопрос, начнем с другого: что такое мелодия? Формально говоря, мелодия – это сыгранные друг за другом звуки разной высоты. А что такое высота звука?

С точки зрения физики, звук – это колебания воздуха. Высота звука определяется *частотой* колебаний, т.е. количеством колебаний в секунду. Камертон, колеблющийся 440 раз в секунду (физики говорят «с частотой 440 герц»; название единицы частоты дано в честь немецкого физика Генриха Герца), дает ноту *ля* первой октавы.

На слух бóльшая частота соответствует более высоким нотам. Очень низкие и очень высокие звуки становятся уже неслышимыми. Считается, что человек может слышать звуки в диапазоне от 20 герц до 20 килогерц (хотя на самом деле у разных людей эти границы могут быть разными; с возрастом диапазон слышимых частот уменьшается).

Звук низкой частоты, который мы не слышим, иногда называют «инфразвуком», высокой – «ультразвуком». С помощью ультразвуков разговаривают друг с другом дельфины.

Частота тока в электросети – 50 герц, т.е. 50 колебаний в секунду (это относится к Европе, в Америке – 60 герц). Если из-за неисправности сетевой фон проникает в звуковой тракт магнитофона, слышно низкое гудение.

Задача 1. Натягивая струну сильнее, мы изменяем частоту колебаний. Как вы думаете, увеличивается частота или уменьшается? Попробуйте сделать это с натянутой ниткой.

Задача 2. Зажимая струну (например, гитары) пальцем, мы как бы уменьшаем ее длину, почти не меняя натяжения. Как вы думаете, что происходит с высотой звука?

Задача 3. Пластинку на 33 оборота поставили на 45; как изменится частота всех записанных на ней звуков?

Задача 4. Где в рояле более низкие ноты – слева или справа? Как это связано с формой рояля?

Задача 5. Комар зудит почти как камертон. Сколько взмахов в секунду делают его крылья?

Задача 6. Как вы думаете, кто издает более высокий звук – комар или большая муха?

Оказывается, что на слух в первую очередь воспринимаются *отношения частот* соседних звуков мелодии, а не сами частоты. Лишь немногие люди с «абсолютным слухом» (далеко не у всех музыкантов он есть) могут отличить взятую на рояле ноту *ля* от ноты *соль*. Однако почти каждый человек после небольшой практики легко отличит интервал *ре – ля* (квинта, отношение частот $ре : ля = 2 : 3$) от *ре – соль* (кварта, отношение частот $ре : соль = 3 : 4$).

Задача 7. Найдите отношение частот соседних нот *соль* и *ля*, используя эти данные.

Теперь мы можем сказать, какие мелодии звучат одинаково (отличаясь лишь «тональностью») – это те, в которых одинаковы *отношения частот*.

Задача 8. Мелодия *ля – ми – ля* (нисходящая) состоит из трех нот с частотами 440, 330 и 220 герц. Какими будут частоты, если сыграть такую же (с теми же отношениями частот) мелодию, начиная с ноты *ми* (ее частота 330 герц)?

▷ Согласно сказанному, нужно, чтобы

$$440 : 330 : 220 = 330 : x : y.$$

Поскольку

$$440 : 330 : 220 = 4 : 3 : 2,$$

получаем $y = 330 \cdot (1/2) = 165$, $x = 330 \cdot (3/4) = 247,5$. Соответствующие ноты называются *ми – си – ми*. ◀

Посмотрев на клавиатуру рояля, легко заметить, что она «периодична»: одни и те же комбинации белых и черных клавиш повторяются – как говорят, в «разных октавах». Отстоящие на период (на октаву) ноты называются одинаково и отличаются по частоте ровно в 2 раза. Таким образом, ноты *ля* в разных октавах имеют частоты

$$\dots 55, 110, 220, 440, 880, 1760, \dots$$

образующие геометрическую прогрессию со знаменателем 2.

Задача 9. Как много октав может быть у рояля, если все должны быть слышны? (Считайте, что слышны звуки в диапазоне от 20 до 20000 герц.)

Геометрическую прогрессию образуют не только ноты *ля*, но и другие одноименные ноты: ноты *соль* образуют еще одну геометрическую прогрессию (также со знаменателем 2), ноты *фа* – третью и так далее.

Задача 10. Глядя на клавиатуру рояля (рис.1), подсчитайте, сколько всего прогрессий получается (сколько нот в одной октаве).

Ответ. 12 (7 белых клавиш и 5 черных).



Рис. 1

Названия нот: черная клавиша между *до* и *ре* называется *до диез* или *ре бемоль*, между *ре* и *ми* — *ре диез* или *ми бемоль*, и так далее. (Тем самым *диез* обозначает повышение звука, а *бемоль* — понижение.) Музыканты используют значок \sharp для *диеза* и \flat для *бемоля*. Используя их, можно записать: $до \sharp = ре \flat$.

Задача 11. Что должен сделать пианист, чтобы сыграть мелодию с удвоенными частотами всех нот?

▷ Сдвинуть руку вправо на октаву и играть как обычно. ◁

Теперь сыграем на рояле *хроматическую гамму*, нажимая все клавиши (белые и черные) подряд слева направо:

$до \rightarrow до \sharp = ре \flat \rightarrow ре \rightarrow ре \sharp = ми \flat \rightarrow ми \rightarrow фа \rightarrow$
 $\rightarrow фа \sharp = соль \flat \rightarrow соль \rightarrow соль \sharp = ля \flat \rightarrow ля \rightarrow$
 $\rightarrow ля \sharp = си \flat \rightarrow си \rightarrow до \rightarrow \dots$

Оказывается, частоты нот в хроматической гамме образуют геометрическую прогрессию.

Мы увидим, почему так получается, чуть позже.

Задача 12. Считая, что частоты нот в хроматической гамме образуют геометрическую прогрессию, найдите знаменатель прогрессии.

▷ Обозначим частоту ноты *до* за c , а искомый знаменатель — за q . Тогда $до \sharp = ре \flat$ имеет частоту $c \cdot q$, $ре$ имеет частоту $c \cdot q^2$ и так далее:

$до \quad до \sharp \quad ре \quad ре \sharp \quad ми \quad фа \quad фа \sharp$
 $c \quad cq \quad cq^2 \quad cq^3 \quad cq^4 \quad cq^5 \quad cq^6$
 $соль \quad соль \sharp \quad ля \quad ля \sharp \quad си \quad до$
 $cq^7 \quad cq^8 \quad cq^9 \quad cq^{10} \quad cq^{11} \quad cq^{12}$

Нота *до* следующей октавы имеет вдвое большую частоту, так что $cq^{12} = 2c$. Отсюда $q^{12} = 2$, $q = \sqrt[12]{2}$ ◁

Музыканты называют интервал между соседними нотами *полутоном*. Октава состоит, таким образом, из 12 полутонов, и на каждый полутон приходится увеличение частоты в $\sqrt[12]{2}$ раз.

Задача 13. Между нотами *до* и *ре* два полутона (или один тон, как говорят музыканты). Найдите отношение частот этих нот.

▷ $(\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$. ◁

Теперь объясним, почему хроматическая гамма дает геометрическую прогрессию. Это необходимо для того, чтобы любую мелодию можно было сыграть, начиная с любой ноты. Поясним это на примере простейшей мелодии из двух нот: *до* и *до диез*. Сыграем ее, начиная с *до диеза*: *до диез* — *ре*. Чтобы эти мелодии звучали одинаково, нужно, чтобы отношения частот были равны:

$$\frac{ре}{до \sharp} = \frac{до \sharp}{до}$$

А это и есть определение геометрической прогрессии.

Задача 14. Для какой ноты x мелодии $до \rightarrow x$ и $x \rightarrow до$ (до следующей октавы, т.е. удвоенной частоты) будут звучать одинаково?

Такой интервал музыканты называют «тритоном». Он как бы делит октаву пополам, на два равных интервала.

Задача 15. Фуга *до минор* из первого тома «Хорошо темперированного клавира» Баха открывается такой темой (рис.2). Затем эта же тема (с одним изменением) проходит в другой тональности (рис.3). Найдите измененное место. Знаки \sharp или \flat перед нотой означают повышение и понижение на полтона. Обозначения нот указаны на рисунке 4. (Мы просим прощения у музыкантов за то, что записываем мелодию без трех бемолей в ключе, как это принято.)

Вероятно, внимательный читатель уже заметил несогласованность в наших объяснениях.

Задача 16. Зная, что хроматическая гамма есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\sqrt[12]{2}$, найдите отношение частот нот *ре* и *ля* (восходящая квинта).

▷ Между *ре* и *ля* семь полутонов, поэтому отношение частот равно $(\sqrt[12]{2})^7$. С помощью калькулятора его легко найти: $(\sqrt[12]{2})^7 = 1,498 \dots$

Это близко к отношению 3 : 2, которое мы называли раньше, но все же не точно совпадает с ним. ◁

Задача 17. Найдите отношение частот в восходящей квинте *ре* — *соль* и сравните его с отношением 4 : 3, которое мы называли раньше.

▷ $(\sqrt[12]{2})^5 = 1,3348 \dots$; $4/3 = 1,3333 \dots$ ◁



Рис. 2

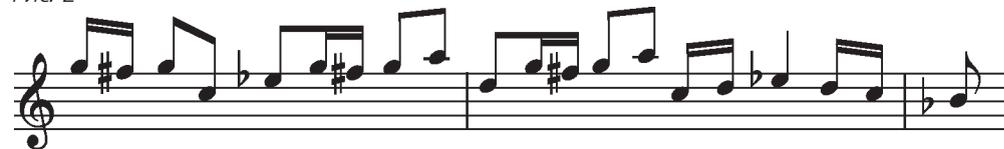


Рис. 3

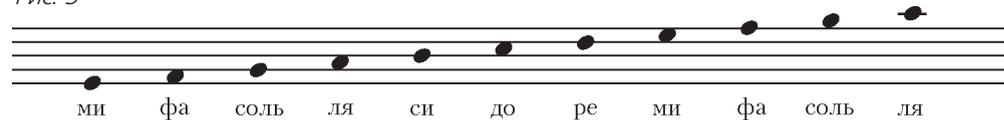


Рис. 4

Так что же такое квинта – отношение частот $(\sqrt[12]{2})^7$ или $3 : 2$? В некотором смысле оба ответа правильны. Сейчас мы попробуем объяснить, что имеется в виду.

Если вы услышите одну ноту, а через минуту другую, то не почувствуете гармонии или дисгармонии. Но если сыграть ноты одну за другой или даже обе сразу, то станет слышно, хорошо ли они звучат вместе. Скрипач, настроив одну из струн по камертону (на практике обычно по роялю аккомпаниатора или гобою в оркестре), затем настраивает вторую так: ведя смычком по обеим струнам, он регулирует натяжение второй струны, пока они не будут хорошо («чисто») звучать вместе.

В каком случае две ноты образуют гармоничный интервал? Оказывается, это бывает, когда *их частоты относятся друг к другу как небольшие целые числа*. Почему так получается, мы говорить не будем – для этого нужно знать немного тригонометрии. Вместо этого перечислим некоторые интервалы и их названия (см. табл.1).

Таблица 1

Интервал	Название интервала	Интервал	Название интервала
2 : 1	октава	4 : 3	кварта
3 : 2	квинта	5 : 4	большая терция

Задача 18. Вторая нота восходящей мелодии образует с первой октаву, а третья со второй – квинту. Как относятся друг к другу частоты третьей и первой нот?
Ответ. $3 : 1$.

Задача 19. Тот же вопрос, если третья нота образует со второй большую терцию.

Такие «чистые» интервалы получаются при игре на скрипке или других инструментах, где можно непрерывно менять высоту звука. На рояле чистых интервалов не получается, поскольку все отношения частот являются степенями числа $q = \sqrt[12]{2}$ (см. табл.2).

Таблица 2

Название интервала	Чистый интервал	Интервал на рояле	
малая терция	$6 : 5 = 1,2$	1,1892...	q^3
большая терция	$5 : 4 = 1,25$	1,2599...	q^4
кварта	$4 : 3 = 1,333...$	1,3348...	q^5
квинта	$3 : 2 = 1,5$	1,4983...	q^7
малая секста	$8 : 5 = 1,6$	1,5874...	q^8
большая секста	$5 : 3 = 1,666...$	1,6817...	q^9
октава	$2 : 1 = 2$	2	q^{12}

Конечно, можно попросить настройщика настраивать рояль иначе – так, чтобы некоторые интервалы были чистыми. Тогда другие интервалы станут еще

более далекими от чистых и красивая мелодия, начатая с другой ноты, может звучать ужасно.

До XVIII столетия рояли (точнее, клавесины и органы – современный рояль появился позже) настраивали, стараясь сделать некоторые интервалы чистыми. При этом одни тональности звучали красиво, а другие (как правило, с большим числом черных клавиш) – ужасно, и композиторы старались их избегать, считая, что все равно нормальный органист в них играть не сможет.

Традиция делить тональности на «хорошие» и «плохие» и писать музыку только в хороших была поколеблена великим Бахом, который написал «Хорошо темперированный клавир» – сборник прелюдий и фуг. Он состоит из двух частей. В каждой части – 24 прелюдии и фуги, по одной в каждой мажорной и минорной тональности. Неизвестно, как в точности Бах настраивал свой клавесин – была ли это равномерная темперация, когда хроматическая гамма образует геометрическую прогрессию, или какая-то не вполне равномерная. Но современные исполнители играют его на равномерно темперированных роялях, на которых все интервалы (за исключением октавы) звучат не совсем чисто – но зато одинаково во всех тональностях.

Задача 20. Достаньте запись «Хорошо темперированного клавира» и послушайте.

В заключение обсудим вот какой вопрос: а почему, собственно, в октаве именно 12 нот (полутонов)? Что мешает изготовить рояль с 13 или 7 клавишами в каждой октаве? В этом случае отношение частот соседних нот было бы $\sqrt[13]{2}$ или $\sqrt[7]{2}$. Оказывается, что тогда основные интервалы ($3 : 2$, $4 : 3$ и так далее) будут значительно менее чистыми.

Задача 21. Найдите отношения частот, если в октаве 7 (равноотстоящих) нот. Есть ли среди отношений сколько-нибудь близкие к $3/2$ или $4/3$? Сравните с приведенной выше таблицей для 12 нот.

Если вы проделаете аналогичные вычисления для других чисел нот в октаве, то убедитесь, что 12 является исключительно удачным выбором – при других (не слишком больших) числах приближения заметно хуже.

Замечательно, что музыканты использовали 12-тоновую систему, ничего не зная о геометрических прогрессиях и не делая никаких вычислений – подобно тому, как пчелы делали аккуратные шестигранные соты задолго до того, как люди установили, что именно такая форма оптимальна.

Сверхзвуковые самолеты и конус Маха

Е. СОКОЛОВ

СВЕРХЗВУКОВЫЕ САМОЛЕТЫ НЕ ТОЛЬКО ПОКОРЯЮТ воздушные океаны, но иногда появляются и в школьных задачах. Вот – примеры.

Задача 1. Наблюдатель услышал звук сверхзвукового самолета через $\Delta t = 10$ с после того, как самолет пролетел над ним. На какой высоте летит самолет, если его скорость $v = 660$ м/с, а скорость звука $c = 330$ м/с?

Для человека, который первый обращается к рассмотрению полетов сверхзвуковых самолетов, условие этой задачи в высшей степени загадочно.

– А почему так поздно наблюдатель услышал шум самолета? Ведь обычно мы слышим самолет задолго до того, как он пролетит над нами.

– Может, наблюдатель просто задумался над чем-то, поэтому и услышал звук не сразу?

– А может, и не надо ни о чем думать, а просто умножить время на скорость? Только скоростей в условии две...

Эти и другие подобные мысли роятся в голове, цепляются одна за другую и совершенно не проясняют сути дела. И это не удивительно. Привыкшим к миру дозвуковых скоростей очень сложно догадаться, чем полет сверхзвукового самолета отличается от полета обычного самолета и почему мы слышим сверхзвуковой самолет лишь после того, как он пролетит над нами. Первым эту загадку разгадал профессор Венского университета Эрнст Мах. С его именем связаны понятия «конус Маха» и «число Маха».

Чтобы понять, что такое конус Маха, его надо хоть раз в жизни построить самому. Сделаем это и мы. Для этого нам понадобятся лист бумаги в клетку, карандаш, линейка и циркуль. Пусть по листу нашей бумаги слева направо движется сверхзвуковой самолет, пролетающий 2 клетки в секунду, а скорость звука составляет 1 клетку в секунду. Начинаем построение. Если сейчас наш самолет находится в точке C (рис.1,а), то где он был пять секунд назад?

– На десять клеточек левее, в точке A (рис.1,б).

– Правильно. Излученный им в этот момент звук за пять секунд распространится на пять клеточек во все стороны.

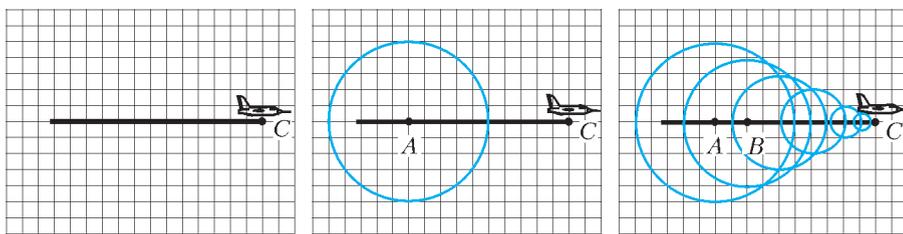


Рис. 1

Поэтому ставим ножку циркуля в точку A и рисуем окружность радиусом 5 клеточек. Это мы построили геометрическое место точек, до которых дошел звук, излученный 5 секунд назад. И услышали этот звук к настоящему моменту все наблюдатели, находящиеся внутри и на самой этой окружности. Затем нарисуем круг для звука, излученного 4 секунды назад (ножку циркуля надо поставить в точку B , а радиус этого круга должен составлять 4 клеточки), потом – для трех секунд, для двух, для одной (рис.1,в). Ну а для звука, излученного только что, и рисовать ничего не надо – он еще не успел никуда распространиться, и его круг это просто точка C , сам самолет. Теперь понятно, в каких точках наблюдатели услышат звук, а в каких – нет.

Если рисовать звуковые фронты более часто, то картина станет еще подробнее, и мы увидим самое интересное – звуковые фронты-окружности имеют общие касательные (рис.2). Эти линии называют огибающими семейства окружностей. В нашей задаче эти прямые-огibaющие делят все пространство на область, в которой уже был слышен звук самолета, и область, до которой звук еще не дошел. Точки самой огибающей – это точки, в которые звук только-только пришел. Вот вам и отгадка, почему сверхзвуковой самолет может уже пролететь над наблюдателем, а тот еще ничего не будет слышать – просто его еще не коснулись огибающие.

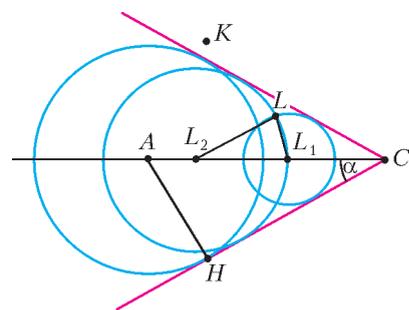


Рис. 2

При построении на плоскости у нас для области слышимости получился, некоторый угол α . А если бы все происходило в пространстве?

– Тогда получился бы конус.

– Правильно. Этот конус и называется конусом Маха. Давайте вычислим его главную характеристику – угол раствора α . Обратимся снова к рисунку 2. В точке K звука еще нет. В точке L наблюдатель уже некоторое время слышит звук, причем в данный момент он слышит сразу и звук, пришедший к нему из точки L_1 , и звук, пришедший к нему из точки L_2 . А вот наблюдатель, стоящий на огибающей в точке H , только-только услышал звук. И слышит он звук, идущий к нему из точки A , чей звуковой фронт касается огибающей в точке H . Так как угол между касательной и радиусом, проведенным в точку касания, прямой, треугольник ACH прямоугольный. Примем, что самолет пролетел гипотенузу этого треугольника AC за время t . Тогда сама гипотенуза будет равна vt , а катет AH (это расстояние, которое прошел звук) будет равен ct , и для угла Маха

получим $\sin \alpha = \frac{c}{v}$. Число $M = \frac{v}{c}$, показывающее, во сколько раз скорость самолета превышает скорость звука, называют числом Маха. Используя это число, мы можем записать полученную формулу так, как когда-то ее записал сам Эрнст Мах:

$$\sin \alpha = \frac{1}{M}.$$

Итак, загадки сверхзвуковых самолетов

для нас больше нет. Задачи про сверхзвуковые самолеты – это задачи про движение конуса Маха. А вопросы типа «Когда наблюдатель услышит звук самолета?» следует сразу же превращать в вопросы типа «Когда конус Маха коснется точки H ?»

Применим эти соображения к решению задачи 1. Посмотрите на рисунок 3, на котором главный элемент – конус

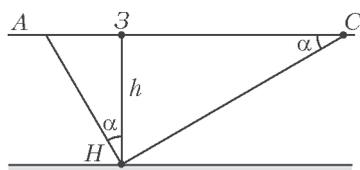


Рис. 3

Маха. Для треугольника ZCH (зенит, самолет, наблюдатель) нам известно следующее. Угол $HЗС$ – (по построению) прямой, угол ZCH – это угол Маха, который для нашего самолета равен 30° , потому что $M = \frac{v}{c} = 2$. И еще известна сторона $ZС$: после того, как самолет был в зените, прошло время Δt , следовательно, расстояние, которое он пролетел, равно $ZС = v\Delta t$. Теперь мы можем определить высоту полета:

$$h = ZС \operatorname{tg} \alpha = v\Delta t \frac{1/M}{\sqrt{1-1/M^2}} = \frac{v\Delta t}{\sqrt{M^2-1}} = 3810 \text{ м.}$$

Первая задача решена.

Вот вам еще несколько задач. Некоторые – для самостоятельного решения, а некоторые мы решим вместе с вами.

Задача 2. Сверхзвуковой самолет, летящий горизонтально со скоростью, вдвое большей скорости звука, пролетает мимо двух микрофонов. Через какое время после первого зафиксирует звук самолета второй микрофон, если расстояние между ними $\Delta l = 13,2 \text{ м}$, а скорость звука $c = 330 \text{ м/с}$? Рассмотрите два случая: а) микрофоны расположены горизонтально; б) микрофоны расположены вертикально.

Задача 3. Траектория сверхзвукового самолета проходит с запада на восток. Первый наблюдатель находится непосредственно под траекторией самолета, второй – на расстоянии $a = 4500 \text{ м}$ от него к югу, а третий – на расстоянии $b = 8000 \text{ м}$ к северу. Чему равны высота полета самолета и число Маха, если второй наблюдатель услышал звук на $\Delta t_2 = 2,28 \text{ с}$ позже первого, а третий – на $\Delta t_3 = 3,80 \text{ с}$ позже второго? Скорость звука $c = 330 \text{ м/с}$.

Задача 4. Два сверхзвуковых самолета летят навстречу друг другу параллельными курсами. Число Маха для первого самолета M_1 , для второго M_2 . Скорость звука c . Второй летчик услышал звук первого самолета через время Δt после того, как первый летчик услышал звук второго самолета. Чему равно расстояние между траекториями самолета? Чему было равно расстояние между самолетами, когда первый летчик услышал звук? Чему было равно расстояние между самолетами, когда второй летчик услышал звук?

Задача 5. Самолет 1 летит со сверхзвуковой скоростью v_1 . Летчик самолета 2 хочет лететь так, чтобы не слышать шума мотора первого самолета. При какой минимальной скорости ему это удастся? Какого курса ему следует при этом придерживаться?

Эту задачу давайте решать вместе.

Пусть летчик второго самолета выбрал курс, составляющий угол β с курсом первого самолета (рис.4). Его траектория – прямая, и по этой прямой движутся две точки: сам второй самолет C_2 и точка A – точка пересечения этой прямой и образующей конуса Маха первого самолета. Лет-

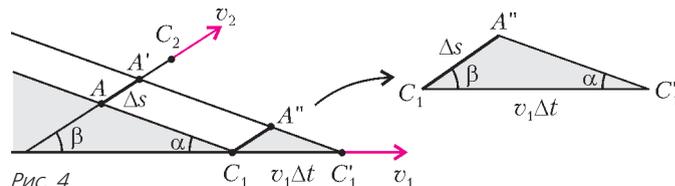


Рис. 4

чик второго самолета никогда не услышит звука первого самолета, если точка A никогда не догонит его. Поэтому скорость второго самолета должна быть больше или равна скорости точки A . Найдем эту скорость.

Рассмотрим смещение первого самолета за некоторое время Δt . В треугольнике $C_1C_1'A''$ сторона C_1A'' равна смещению Δs точки A . Используя теорему синусов, получаем

$$\Delta s = \frac{v_1 \Delta t \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)},$$

откуда для скорости точки A находим

$$v_A = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1 \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Обсудим полученное выражение. Если второй самолет будет лететь в том же направлении, что и первый ($\beta = 0$), то

$$v_2 = v_A = \frac{c}{\sin \alpha} = v_1$$

– второму самолету следует иметь скорость, большую или равную скорости первого самолета. Разумный результат. Для курса, перпендикулярного курсу первого самолета ($\beta = 90^\circ$), скорость точки A будет равна

$$v_{\perp} = \frac{c}{\sin(\alpha + 90^\circ)} = \frac{c}{\cos \alpha} = \frac{c}{\sqrt{1-1/M^2}} = \frac{v_1}{\sqrt{M^2-1}}.$$

А вот минимальная скорость у точки пересечения будет в том случае, когда $\sin(\alpha + \beta) = 1$, т.е. когда $\alpha + \beta = 90^\circ$. Это условие будет выполнено, если наша прямая будет перпендикулярна образующей конуса Маха. Тогда скорость точки пересечения будет просто равна скорости звука c . Об этой скорости часто говорят как о скорости движения волнового фронта или как о скорости движения огибающей.

Итак, ответ к нашей задаче таков. Минимальная скорость, при которой второй летчик может лететь так, чтобы ему не мешал шум первого самолета, это скорость звука c , т.е. достаточно, чтобы второй самолет был просто сверхзвуковым. А для того чтобы путешествовать в тишине, второму летчику следует выбрать курс, перпендикулярный образующей конуса Маха первого самолета.

Задача 6. Сверхзвуковые самолеты летят перпендикулярно друг другу (рис.5) со скоростями, соответствующими числам Маха $M_1 = 3$ и $M_2 = 4$. Сколько времени второй летчик будет слышать шум мотора первого самолета, если первоначальное расстояние между самолетами $L = 6600 \text{ м}$? Услышит ли когда-нибудь первый летчик звук второго самолета? Скорость звука $c = 330 \text{ м/с}$.

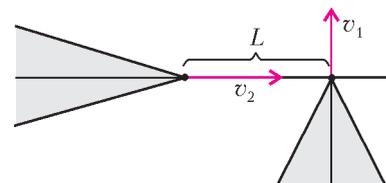


Рис. 5

Обжегшись на молоке, на воду дуют...

А. СТАСЕНКО

... И, ВИДНО, НЕСПРОСТА. НО ЧЕМ ЭТО ОБЪЯСНИТЬ? Наверное, многим знаком невольный эксперимент: быстро вынув палец из кипятка, хочется на него подуть или помахнуть рукой (лучше не пробуйте повторить этот эксперимент). Ясно, что тут речь идет об усилении теплоотвода от пальца в воздух. Физики давно научились описывать этот процесс. Считается, что плотность потока тепловой энергии j_T , измеряемая в Дж/(м²·с), в направлении некоторой координаты r пропорциональна скорости изменения (точнее, темпу изменения) температуры в противоположном направлении:

$$j_T \sim -\frac{\Delta T}{\Delta r}. \quad (1)$$

Здесь Δr – расстояние между двумя точками среды, температуры которых отличаются на ΔT . А знак «минус» говорит о том, что тепло течет от горячих участков к холодным.

Отношение $\frac{\Delta T}{\Delta r}$ называют градиентом температуры вдоль r , а сама зависимость (1) есть закон Фурье – по имени французского физика и математика Жана Батиста Фурье (1768–1830).

Но, оказывается, такая пропорциональность встречается не только в теории теплопроводности. Например, плотность электрического тока $j_{\text{э}}$, измеряемая в А/м² = Кл/(м²·с), пропорциональна градиенту электрического потенциала ϕ , который непосредственно определяет напряженность электрического поля \vec{E} :

$$j_{\text{э}} \sim -\frac{\Delta \phi}{\Delta r} = E_r. \quad (2)$$

Этот закон называется (обобщенным) законом Ома, по имени немецкого физика Георга Симона Ома (1787–1854). Сравнивая выражения (1) и (2), можно и температуру T назвать потенциалом – разность значений этого потенциала вызывает поток тепла.

Далее, если в каком-либо растворе, например сахара в воде или духов в воздухе, концентрация вещества неодинакова в разных точках, то возникает диффузия, и плотность потока молекул этого вещества j_n оказывается пропорциональной градиенту концентрации n , т.е. темпу ее изменения в пространстве:

$$j_n \sim -\frac{\Delta n}{\Delta r}. \quad (3)$$

Это соотношение – закон Фика, в честь немецкого физиолога Адольфа Фика (1829–1901). Теперь можно и концентрацию вещества назвать потенциалом, разность значений которого вызывает диффузионный поток массы.

Но и это еще не все. Когда мы дуем на палец, скорость потока воздуха у его поверхности близка к нулю, а с удалением от поверхности она возрастает. Иными словами, имеет место изменение касательной составляющей скорости по направлению нормали $\Delta u/\Delta r$. В результате возникает касательное напряжение j_u , измеряемое в Н/м², т.е. трение слоев воздуха друг о друга и, в конечном счете, о саму поверхность обтекаемого тела. И, оказывается,

$$j_u \sim -\frac{\Delta u}{\Delta r}. \quad (4)$$

А ведь это напряжение можно назвать плотностью потока импульса: Н/м² = (кг·м/с)/(м²·с)! Сравнивая выражение (4) с предыдущими, как не назвать скорость потенциалом? Жидкости, подчиняющиеся этому закону, называются ньютоновскими. Вы догадались, почему? Правильно: его установил великий Ньютон еще в 1687 году.

Теперь можно удивиться и восхититься: различные по своей природе физические процессы, описание которых более чем 100–300 лет назад предложено замечательными учеными разных стран, отражают некий общий факт: плотность потока любой физической сущности – тепловой энергии, электрического заряда, растворимого вещества, импульса... пропорциональна темпу пространственного изменения соответствующего потенциала – температуры, электрического напряжения, концентрации, скорости...

Все упомянутые процессы называются явлениями переноса. Знак пропорциональности в приведенных соотношениях можно заменить знаком равенства, если при каждом градиенте написать соответствующий коэффициент: теплопроводности, электропроводности, диффузии, вязкости... – это хорошо знают студенты уже первого курса университета.

Однако вернемся к обваренному кипятком пальцу. Кто же переносит тепло от пальца и почему хочется на него подуть? Конечно, этим занимаются молекулы, и, конечно, дуновение ускоряет теплоотвод.

Рассмотрим сферу (или полусферу) радиусом R с температурой поверхности T_n , моделирующую кончик пальца. Если окружающий воздух спокоен, «горячие» молекулы, тепловая скорость которых соответствует T_n , проталкиваются в направлении от поверхности (рис.1,а), а навстречу им также проталкиваются холодные молекулы из «бесконечности», где температура равна T_{∞} . Устанавливается некоторое

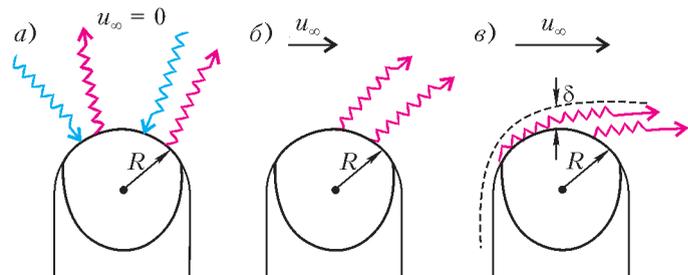


Рис. 1

распределение температуры, которое качественно представлено кривой a на рисунке 2. Можно показать, что температура падает в радиальном направлении довольно плавно, по гиперболическому закону, существенно изменяясь на расстоянии порядка R . (В этих рассуждениях не принята во внимание сила Архимеда, заставляющая всплывать теплый газ в атмосфере холодного и, конечно, помогающая отводу тепла.) В результате плотность потока тепловой энергии от

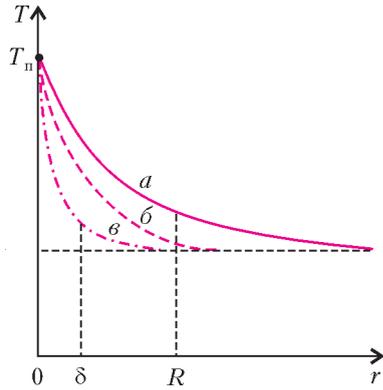


Рис. 2

поверхности можно записать в виде зависимости от конечной разности температур и расстояния, на котором происходит ее существенное изменение:

$$j_a \sim \frac{T_{\text{п}} - T_{\infty}}{R}.$$

Теперь начнем потихоньку дуть на палец. Ясно, что молекулы, уносящие тепло, «сдуваются» потоком воздуха (рис. 1, б). Наконец, подуем что есть силы, тогда все молекулы, «стартующие» от поверхности, уместятся в тонком слое характерной толщины δ (рис. 1, в), существенно меньшей радиуса сферы R ($\delta \ll R$). (Соответствующие этим случаям графики распределения температуры качественно представлены кривыми б и в на рисунке 2.) В результате поток тепла увеличится:

$$j_{\delta} \sim \frac{T_{\text{п}} - T_{\infty}}{\delta} \gg \frac{T_{\text{п}} - T_{\infty}}{R} \sim j_a.$$

Этот тонкий слой называют пограничным. Он был впервые введен известным немецким аэродинамиком Людвигом Прандтлем (1875–1953) – конечно, не в применении к пальцу, а при решении проблем сопротивления тел в потоке жидкости или газа. Есть мнение, что только за введение этого плодотворного понятия Прандтлю следовало бы присудить Нобелевскую премию.

Но продолжим наши рассуждения. Мы знаем, что именно молекулы уносят тепло от пальца (и приносят «холод» из окружающей среды). Значит, для оценки толщины теплового погранслоя следует использовать характеристики молекулярного хаоса. Какие именно? Разумеется, прежде всего это средняя скорость теплового движения $\langle c \rangle$ – чем быстрее движутся молекулы, тем интенсивнее теплообмен. Далее, это средняя длина свободного пробега молекулы l – чем она больше, тем дальше унесет молекула энергию, передав ее следующей молекуле при столкновении. Произведение этих двух величин имеет размерность $\text{м}^2/\text{с}$, а если его умножить на время прохождения воздухом характерного расстояния порядка радиуса R , то получим оценку квадрата толщины погранслоя:

$$\delta^2 \sim \langle c \rangle l \frac{R}{u} \sim \langle c \rangle l t. \quad (5)$$

(Кстати сказать, именно Фурье первым стал применять метод размерностей.)

Соотношение (5) характерно для всех процессов блуждания. Оно восходит к первым попыткам описания броуновского движения частиц. А его образным аналогом является проблема пьяного матроса в незнакомом городе. Оказавшись на любом перекрестке, матрос наугад выбирает

одно из четырех направлений. Спрашивается: как далеко матрос уйдет от начальной точки, пройдя N кварталов? Ответ: средний ожидаемый квадрат этого удаления пропорционален N . Понятно, что удаление δ будет зависеть и от скорости движения $\langle c \rangle$, и от длины кварталов l , т.е. будет описываться выражением (5). Осталось подставить его в формулу для плотности потока тепла от поверхности пальца:

$$j \sim \frac{(T_{\text{п}} - T_{\infty}) \sqrt{u}}{\sqrt{\langle c \rangle} l R}.$$

Отсюда видно, что от нас зависит только скорость потока воздуха u . Именно она превращает медленную диффузию молекул на дне погранслоя в быстрый конвективный перенос на его внешней границе. Так что дуйте сильнее. Но не переусердствуйте. Ибо если достичь сверхзвуковой скорости, то, наоборот, большая кинетическая энергия потока воздуха перейдет в точке торможения в тепло и даст высокую температуру поверхности. Действительно, из закона сохранения энергии

$$\frac{Mu_{\infty}^2}{2} + \frac{5}{2} RT_{\infty} = 0 + \frac{5}{2} RT_{\text{п}},$$

записанного для одного моля воздуха, при скорости обдува, например, $u_{\infty} = 1000$ м/с получим

$$T_{\text{п}} = T_{\infty} + \frac{Mu_{\infty}^2}{5R} = 300 \text{ К} + \frac{0,029 \cdot 10^6}{5 \cdot 8,31} \text{ К} \approx 1000 \text{ К}!$$

Впрочем, едва ли наши губы и легкие позволят обеспечить сверхзвуковое обтекание пальца воздухом.

Интересно заметить, что при ковке знаменитых сабель из дамасской стали кузнец вручал джигиту раскаленный клинок и джигит немедленно скакал во весь опор, усиленно размахивая им. По-видимому, такой режим охлаждения был оптимальным для тогдашней инновационной технологии.

Но все ли мы учли? Нет, не все: палец-то после кипятка мокрый! И тут вступает в силу еще процесс испарения молекул воды, за которым следует их диффузия в погранслое и унос воздухом. Для описания этого процесса нужно использовать соотношение (3). Нам это не в новинку – ведь и рассмотренная ранее теплопроводность есть не что иное как диффузия тепловой энергии. И теперь к отводу тепла молекулами воздуха добавится унос теплоты фазового перехода L вместе с испаряющейся массой воды:

$$j_m L \sim \frac{n_{\text{п}} - n_{\infty}}{\delta}.$$

Здесь $j_m = j_n m$ (m – масса молекулы) – это плотность потока массы, уносимой с обдуваемого тела, $n_{\text{п}}$ и n_{∞} – соответствующие значения концентрации молекул воды. Этот унос тепла максимален, если окружающий воздух сухой ($n_{\infty} \rightarrow 0$). И это значительная добавка – ведь удельная теплота парообразования для воды достаточно велика: $L \approx 2$ МДж/кг.

Вот почему для охлаждения летательных аппаратов, входящих в атмосферу с большой скоростью, используют жидкость, продавливаемую изнутри через пористую поверхность тела: испаряясь, она уносит тепло и спасает аппарат от сгорания. Не напрасно также в жарких пустынях для охлаждения пепси ставят бутылку, обернутую мокрой тряпкой, на крышу автомобиля и гонят его как можно быстрее. Тут уж работают и u , и L , и...

Вот как полезно знать газотермодинамику!

О пользе графиков

М.ГОРЕЛОВ

В ШКОЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ ЗАМЕТНОЕ МЕСТО УДЕЛЯЕТСЯ построению графиков функций, но не всегда объясняется, зачем это нужно. Ниже приводится ряд задач, ключом к решению которых является построение графиков. Говорят, что «геометрией называется метод не делать ошибок в длинных вычислениях». Что ж, в каждой шутке есть доля истины.

Геометрические основы

Задача 1 (III этап Всероссийской олимпиады, 1998). По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями несколько велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. При обгоне фляжка от одного обязательно переходит к другому (моментов, когда двое одновременно обгоняют одного, не случается). Может ли оказаться при некотором начальном расположении и некоторых скоростях, что как бы долго они ни ездил, у двух из них фляжка так и не побывает?

Решение. Выберем двух любых велосипедистов и обозначим их A и B . Докажем, что у одного из них фляжка непременно побывает. Построим графики движения выбранных спортсменов и фляжки (на рисунке 1 графики движения A и B зеленые, а график движения фляжки – красный). За начало координат примем момент времени, когда B обогнал A , и точку трека, в которой это произошло. Пусть в следующий раз B обгонит A в момент времени T , а

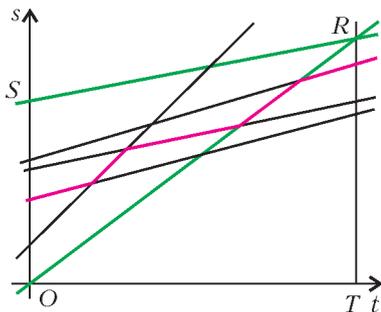


Рис. 1

длина трека равна S . Поскольку велосипедисты движутся по кругу, точки с ординатами x и $x + S$ обозначают одно и то же место на треке. Это соглашение позволяет нам изображать графики прямыми линиями. При этом у нас остается свобода выбора начальных значений координат. Выберем их так, что в начальный момент времени координата A равна S , координата B равна нулю, а координата фляжки лежит на отрезке $[0; S]$.

В силу последнего условия, график движения фляжки «входит» в треугольник OSR (см. рис. 1) через вертикальную сторону. Значит, он должен «выйти» из него через одну из других сторон. Но в момент первого пересечения графика движения фляжки с графиком движения велосипедиста фляжка по правилам переходит к этому спортсмену.

Запишем эти рассуждения более формально. Пусть $f(t)$ и $h(t)$ – координаты велосипедистов A и B в момент времени t , а $g(t)$ – соответствующая координата фляжки. В силу

выбора начальных условий $f(0) \leq g(0) \leq h(0)$. Поскольку $f(T) = h(T)$, неравенства $f(T) < g(T) < h(T)$ не могут выполняться одновременно, т.е. либо $f(T) \geq g(T)$, либо $g(T) \leq h(T)$. В первом случае разность $f(t) - g(t)$ меняет знак на отрезке $[0; T]$, а потому обращается в ноль. Тогда велосипедист A непременно получает фляжку. Второй случай рассматривается аналогично.

Анализ приведенного решения показывает, что в нем невольно использовалась

Теорема о промежуточном значении. Если непрерывная функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, то внутри отрезка она обращается в ноль.

В задаче 1 эта теорема применялась для кусочно-линейных функций. В этом случае она доказывается элементарными средствами. В общем случае доказательство можно найти в большинстве вузовских учебников математического анализа. Мы будем использовать как «очевидный» следующий геометрический факт: если непрерывная кривая соединяет две точки, лежащие по разные стороны от прямой, то она пересекает эту прямую. Пожалуй, в наиболее чистом виде этот факт используется при решении следующей задачи.

Задача 2. Турист вышел на рассвете из базового лагеря и к вечеру поднялся на вершину горы. Переночевав там, он утром следующего дня отправился в обратный путь и вечером вернулся в базовый лагерь. Докажите, что по пути туда и обратно в какое-то время суток он находился на одной высоте.

Решение. Нарисуем на одной координатной плоскости графики зависимости высоты туриста над уровнем базового лагеря от времени суток в два рассматриваемых дня (рис. 2). Пусть $f(t)$ – высота в момент времени t при подъеме, а $h(t)$ – при спуске. Из законов физики следует, что функции f и h непрерывны. По условию разность $f(0) - h(0)$ отрицательна, а разность $f(24) - h(24)$ положительна (время измеряется в часах). Поэтому найдется момент времени t , когда разность $f(t) - h(t) = 0$, или $f(t) = h(t)$, что и требуется доказать.

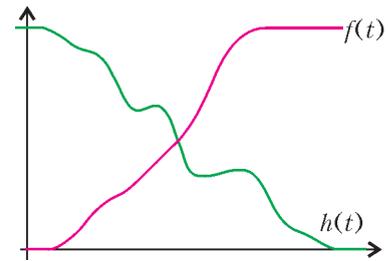


Рис. 2

Упражнения

1. Числа a , b и c таковы, что система уравнений $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ имеет решение. Докажите, что $a = b = c$.
- 2 (Н.Константинов). Из пункта A в пункт B ведут две непересекающиеся дороги. Два мотоцикла, выехавшие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой длины, меньшей l , смогли доехать в B , не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых веза диаметра l , центры которых движутся навстречу друг другу из A и B соответственно?

Квадратные трехчлены

Задача 3. Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a – натуральное, b и c – целые числа, имеет два различных корня внутри интервала $(0; 1)$. Докажите, что $a \geq 5$.

Решение. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Если $f(x)$ удовлетворяет условиям задачи, то им удовлетворяет и многочлен $f(1-x)$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $f(1) \geq f(0) = c$. Нарисуем графики многочленов

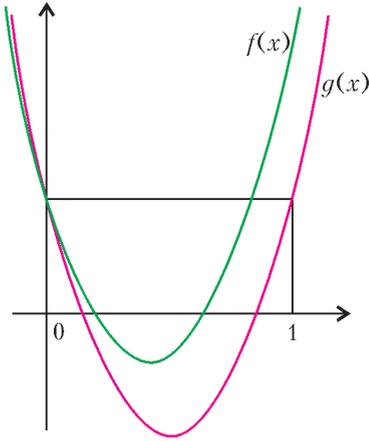


Рис. 3

$f(x)$ и $g(x) = ax(x-1) + c$ (рис. 3). Их разность — линейная функция, поэтому графики пересекаются в единственной точке $x = 0$, если только не совпадают. А так как $f(1) \geq g(1)$, то $f(x) \geq g(x)$ на всем интервале $(0; 1)$.

Поэтому минимальное значение $g(x)$ на отрезке $[0; 1]$ не превосходит минимального значения $f(x)$ на том же отрезке, которое отрицательно. Но

минимум $g(x)$ достигается при $x = \frac{1}{2}$, т.е. $g(\frac{1}{2}) < 0$, откуда $\frac{1}{4}a > c \geq 0$, или $a > 4$.

Задача 4 (III этап Всероссийской олимпиады, 1998). Про квадратные трехчлены с различными старшими коэффициентами известно, что их разности $f - g$, $g - h$, $h - f$ имеют по одному корню. Докажите, что корни разностей совпадают.

Решение. Пусть многочлен $g(x)$ имеет средний по величине старший коэффициент. Тогда график многочлена, имеющего самый большой старший коэффициент, лежит выше графика $g(x)$ при больших по модулю значениях x . Так как эти два графика имеют единственную общую точку, то же отношение верно при всех значениях x , кроме одного (рис. 4).

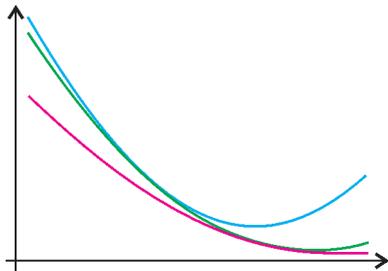


Рис. 4

По аналогичным соображениям график третьего многочлена лежит ниже графика $g(x)$ во всех точках, кроме одной. Значит, графики этих многочленов f и h могут пересечься только на графике многочлена g . Но поскольку каждый из них имеет с g всего по одной общей точке, эти точки совпадают.

Упражнения

3 (Польская олимпиада, 1950). Какому условию должны удовлетворять коэффициенты двух квадратных трехчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ для того, чтобы между корнями каждого из них был заключен корень другого?

4 (Московская олимпиада, 1954). Известно, что модули всех корней уравнений $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ меньше 1. Докажите, что модули всех корней уравнения $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = 0$ тоже меньше 1.

5 (III этап Всероссийской олимпиады, 1988). Найдите соотношения между коэффициентами a, b, c , при которых имеет решение система с одним неизвестным $ax^2 - bx + c = 0$, $bx^2 - cx + a = 0$, $cx^2 - ax + b = 0$.

6 (IV этап Всероссийской олимпиады, 1985). Докажите, что для любых чисел x и y , отличных от нуля, выполняется неравенство $x^4 + y^4 \leq \frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2}$.

Многочлены третьей степени

Для решения следующих задач полезно знать, что коэффициенты p, q и r многочлена

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - px^2 + qx - r$$

определяются условиями

$$p = a + b + c, q = ab + ac + bc, r = abc$$

(это доказывается раскрытием скобок). Эти формулы называются формулами Виета. Если $a < b < c$, то значения многочлена положительны на интервалах $(a; b)$ и $(c; +\infty)$ и отрицательны на интервалах $(-\infty; a)$ и $(b; c)$. Графики таких многочленов изображены на рисунке 5.

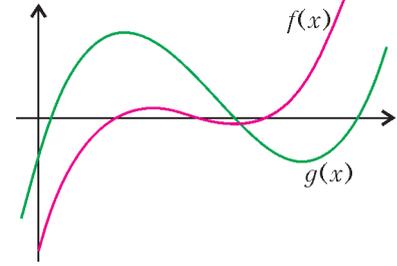


Рис. 5

Задача 5 (М2046). Докажите, что если числа a, b и c положительны и $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = abc$, то $a = b = c$.

Решение. Отрицательным может быть не более чем одно из трех чисел $a + b - c, b + c - a, c + a - b$. Но их произведение положительно, поэтому все эти числа положительны.

Не ограничивая общности, можно считать, что $a \leq b \leq c$. Тогда $a + b - c \leq a + c - b \leq b + c - a$.

Формулы Виета наводят на мысль рассмотреть многочлены $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ и $g(x) = (x-a-b+c)(x-a-c+b)(x-b-c+a)$. На отрезке $[a+b-c; b+c-a]$ лежат все три корня многочлена $f(x)$, поэтому на этом отрезке он меняет знак (см. рис. 5). А поскольку на концах рассматриваемого отрезка многочлен $g(x)$ обращается в ноль, на этом отрезке меняет знак и разность $f(x) - g(x)$. Но тогда эта разность имеет на данном отрезке корень. По условию есть и второй корень $x = 0$.

Но разность многочленов — линейная функция. Значит, она тождественно равна нулю, т.е. многочлены совпадают. В частности, совпадают их множества корней, следовательно, $a = a + b - c$ и $c = b + c - a$, откуда $b = c$ и $a = b$.

Разумеется, приблизительная картинка, каковой является график, не может служить доказательством. Но «построить график» не означает просто «нарисовать картинку». Нужно еще доказать, что некоторые характерные, интересные в данном контексте точки расположены так, а не иначе. Что и было сделано.

Задача 6. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a < b < c, a \leq x \leq y \leq z \leq c$ и $a + b + c \leq x + y + z$. Докажите, что $abc \leq xyz$ и $ab + bc + ac \leq xy + yz + xz$.

Решение. Нарисуем графики многочленов $f(t) = (t-a)(t-b)(t-c)$ и $g(t) = (t-x)(t-y)(t-z)$ (рис. 6). Очевидно, что $f(a) = 0, g(a) \leq 0, f(c) = 0, g(c) \geq 0$, поэтому $g(a) - f(a) \leq 0$ и

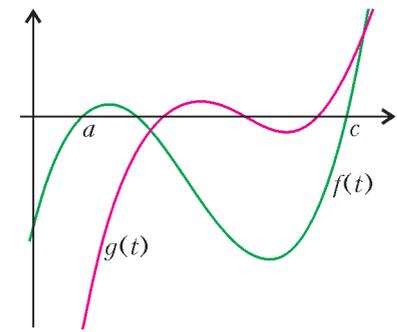


Рис. 6

$g(c) - f(c) \geq 0$. Следовательно, на отрезке $[a; c]$ разность $g(t) - f(t)$ имеет корень.

Если $a + b + c = x + y + z$, то эта разность – линейная функция, и других корней нет. Поэтому $g(0) - f(0)$ и $g(a) - f(a)$ имеют одинаковый знак, т.е. $g(0) - f(0) \leq 0$, что дает первое из доказываемых неравенств. Чтобы получить второе неравенство, нужно заметить, что значения $g(t) - f(t)$ при больших t имеют тот же знак, что и $g(c) - f(c)$, т.е. неотрицательны, а потому коэффициент при t неотрицателен.

Если же $a + b + c < x + y + z$, то график разности $g(t) - f(t)$ – парабола ветвями вниз, а значит, $g(t) - f(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Так как $g(c) - f(c) \geq 0$, второй корень этой разности лежит на луче $[c; +\infty)$. Тогда $g(0) - f(0) \leq 0$, что дает первое неравенство $abc \leq xyz$. Поскольку разность $g(t) - f(t)$ имеет два положительных корня, по теореме Виета для квадратного трехчлена коэффициент при t положителен, откуда следует второе неравенство.

У доказанных неравенств много важных частных случаев.

При $x = y = z = \frac{a+b+c}{3}$ получим неравенство Коши $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ и неравенство $3(ab+bc+ac) \leq (a+b+c)^2$.

Если $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a+c}{2}$, $z = \frac{b+c}{2}$, получим неравенство Чезаро $8abc \leq (a+b)(a+c)(b+c)$. И так далее.

Упражнения

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0. \end{cases}$$

8 (Всероссийская олимпиада, 1970). Докажите, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1.

9. Рассмотрим многочлен $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, где $a < b < c$ – действительные числа. Пусть p и q – значения этого многочлена в точках локального максимума и локального минимума соответственно. Докажите, что $p + q > 0$ тогда и только тогда, когда $b - a > c - b$.

10 (IV этап Всероссийской олимпиады, 1990). Пусть a, b, c – неотрицательные числа, такие что $a + b + c = 1$. Докажите, что $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$.

11 (III этап Всероссийской олимпиады, 1994). Докажите, что для положительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

12. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a < b < c$, $a \leq x \leq y \leq z \leq c$ и $a+b+c \leq x+y+z$. Докажите, что

$$(x+y+z)^2 abc \leq (a+b+c)^2 xyz.$$

13 (M840, б). Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

14 (III этап Всероссийской олимпиады, 1993). Докажите, что для любых действительных чисел $a > b > c > 0$ выполняется неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$.

15. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c^2}} + \sqrt{\frac{ac}{b^2}} + \sqrt{\frac{bc}{a^2}} \geq \frac{ab}{c^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{bc}{a^2}.$$

16. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a < b < c$, $a \leq x \leq y \leq z \leq c$ и $abc \geq xyz$. Докажите, что

$$a + b + c \geq x + y + z.$$

17. Про положительные числа a, b, c, x, y, z известно, что $a < b < c$, $a \leq x \leq y \leq z \leq c$ и $ab + bc + ac \geq xy + yz + xz$. Докажите, что $a + b + c \geq x + y + z$.

18. Докажите, что если a, b и c – длины сторон треугольника, то выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{1}{\sqrt{a+c-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b-c}} \geq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

19 (M7). Пусть a, b, c – стороны треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Неравенства для сторон треугольника

Если числа a, b и c выражают длины сторон треугольника, то для них, разумеется, справедливы все неравенства, верные для любых положительных чисел. Но можно доказать и неравенства иного типа. Приведем пример.

Задача 7 (M1317). Докажите для любого треугольника ABC неравенство $\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} \leq \frac{8}{27}$, где I – центр вписанной окружности, l_A, l_B, l_C – длины его биссектрис.

Решение. Проведем биссектрису AL , высоту AH и опустим перпендикуляр IK на сторону BC (рис.7,а). Из подобия

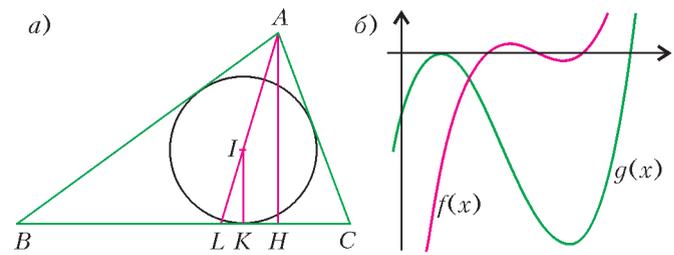


Рис. 7

треугольников LIK и LAN будем иметь $\frac{IA}{LA} = \frac{AH - IK}{AH}$.

Применяя выражения для площади треугольника через высоту и радиус вписанной окружности, получим отсюда

$$\frac{IA}{l_A} = \frac{b+c}{a+b+c}. \text{ Аналогично, } \frac{IB}{l_B} = \frac{a+c}{a+b+c} \text{ и } \frac{IC}{l_C} = \frac{a+b}{a+b+c}.$$

Поэтому доказываемое неравенство переписывается в виде $\frac{1}{4} < \frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}$, где, как обычно, a, b и c – длины сторон треугольника.

Правое неравенство – это неравенство Коши для трех чисел $\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}$.

Левое неравенство переписывается в виде

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)(a+b+c) \leq (a+b)(a+c)(b+c).$$

Поэтому естественно рассмотреть многочлены $f(x) = (x - (a+b))(x - (a+c))(x - (b+c))$ и $g(x) = (x-p)^2(x-2p)$, где p – полупериметр треугольника. В силу неравенства треугольника их графики расположены так, как показано на рисунке 7,б. Поэтому единственный корень линейной функции $f(x) - g(x)$ лежит на отрезке $[p; 2p]$ и значение $f(0) - g(0)$ меньше 0, откуда следует левое неравенство.

Упражнения

20 (III этап Всероссийской олимпиады, 1991). Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то $\frac{1}{4} < \frac{ab+ac+bc}{(a+b+c)^2} \leq \frac{1}{3}$.

21. Пусть a, b, c — стороны треугольника, $u = a + b - c$, $v = a + c - b$, $w = b + c - a$. Докажите неравенство $\frac{uvw}{uv+uw+vw} \leq \frac{abc}{ab+ac+bc}$.

Рациональные функции

Задача 8 (Независимый московский университет, 2003). Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Решение. Выражение в левой части неравенства заметно упрощается, если в каждый знаменатель добавить недостающую переменную. Поэтому рассмотрим функцию $f(x) = \frac{a+cx}{a+b+cx} + \frac{b+ax}{b+c+ax} + \frac{c+bx}{c+a+bx}$ (числители подобраны так, чтобы при $x = 1$, когда знаменатели одинаковы, получилась двойка, стоящая в правой части неравенства). График этой функции получается «сложением» трех гипербол, соответствующих функциям $f_1(x) = \frac{a+cx}{a+b+cx} = 1 - \frac{b}{a+b+cx}$ и т.д., а потому выглядит так, как на рисунке 8.

Функция $f(x)$ имеет три точки разрыва, лежащие на отрицательной половине оси абсцисс. Эти три точки делят ось абсцисс на два луча и два отрезка. На каждом из этих двух отрезков значения функции непрерывно меняются от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому на каждом из этих отрезков уравнение $f(x) = 2$ имеет корень. Еще один корень $x = 1$ легко угадывается. А других корней нет, потому что после умножения уравнения на общий знаменатель (от чего число корней не может уменьшиться) получится кубическое уравнение, которое не может иметь больше трех корней.

Значит, на интервале от самой правой точки разрыва до 1 значения функции меняются от $-\infty$ до 2, в частности $f(0) < 2$, что и требуется доказать.

Эти рассуждения верны, если все три числа a, b и c различны. Если среди них есть совпадающие, то число отрезков будет меньше, но и степень уравнения, получающегося в результате умножения уравнения $f(x) = 2$ на наименьший общий знаменатель, будет на столько же меньше. Поэтому основной вывод сохраняется.

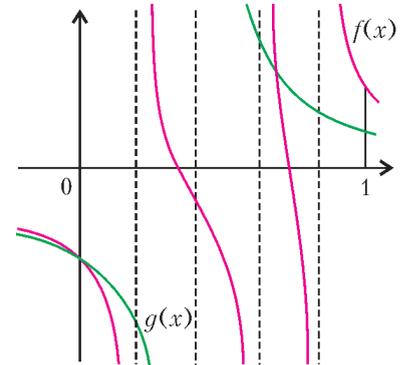
Задача 9 (M182). Докажите, что если a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа, то

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\dots+a_n} + \frac{a_2}{a_1+a_3+\dots+a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Решение. Пусть $A = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Построим графики

функций $f(x) = \frac{a_1}{Ax-a_1} + \frac{a_2}{Ax-a_2} + \dots + \frac{a_n}{Ax-a_n}$ и $g(x) = \frac{A}{Ax-\frac{1}{n}A}$ (рис. 9).

Все точки разрыва функции $f(x)$ лежат на интервале $(0; 1)$. Они вырезают на оси абсцисс $n-1$ отрезок, на каждом из которых значения функции меняются от $-\infty$ до $+\infty$. На всех этих отрезках, кроме одного, функция $g(x)$ непрерывна. Значит, на этих $n-2$ отрезках имеется по одному корню уравнения $f(x) = g(x)$.



Кроме того, $f(0) = g(0) = n$. (Выбор функции g выглядит достаточно естественно, а функция g подбиралась так, чтобы выполнялось последнее равенство и, кроме того, при $x = 1$ ее значение равнялось правой части неравенства.)

После умножения уравнения $f(x) = g(x)$ на общий знаменатель, члены, содержащие x^n , сократятся, и получится уравнение степени $n-1$, которое не может иметь более $n-1$ корней. Поэтому других корней у уравнения $f(x) = g(x)$ нет.

Следовательно, разность $f(x) - g(x)$ сохраняет знак справа от последней точки разрыва функции $f(x)$. А поскольку в правой полуокрестности этой точки она положительна, она будет положительной и при $x = 1$. Отсюда немедленно следует нужное неравенство.

Упражнения

22 (III этап Всероссийской олимпиады, 1982). Пусть числа x и y таковы, что $x \neq y$ и $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{2}{1+xy}$. Докажите, что $xy = 1$.

23 (III этап Всероссийской олимпиады, 1993). Пусть $x \leq 1$, $y \leq 1$, $z \leq 1$, $x + y + z = 0$. Докажите неравенство

$$\frac{x}{2-x} + \frac{y}{2-y} + \frac{z}{2-z} \geq 0.$$

24 (IV этап Всероссийской олимпиады, 1988). Пусть $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ и $a + b + c \leq 3$. Докажите неравенства

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}.$$

25. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, \dots, a_n , удовлетворяющих условию $a_1 + \dots + a_n = 1$, и положительного числа x справедливо неравенство $\frac{a_1}{1+xa_1} + \dots + \frac{a_n}{1+xa_n} \leq \frac{n}{n+x}$.

26. Пусть $0 \leq a_1, \dots, a_n < 1$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{1-a_1} + \dots + \frac{a_n}{1-a_n} \geq \frac{n(a_1 + \dots + a_n)}{n - (a_1 + \dots + a_n)}.$$

27 (Ленинградская олимпиада, 1993). Докажите, что для любых положительных чисел a_k, b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) выполнено неравенство $\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leq \frac{AB}{A+B}$, где $A = \sum_{k=1}^n a_k$, $B = \sum_{k=1}^n b_k$.

28 (Ленинградская олимпиада, 1990). Числа a, b и c лежат на отрезке $[0; 1]$. Докажите, что $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$.

Каустики на плоскости и в пространстве

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

КАУСТИКИ – ЭТО ВЕЗДЕСУЩИЕ ОПТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ и кривые, возникающие при отражении и преломлении света. Каустики можно описать как линии или поверхности, вдоль которых концентрируются световые лучи.

Каустики на плоскости (2D каустики)

Сначала посмотрим, что происходит, когда все световые лучи и кривая, от которой они отражаются, лежат в одной плоскости. Самый важный пример – это отражение параллельных лучей от окружности. Возникающая здесь каустика – яркая линия с острием, расположенным между вершиной и центром зеркала (рис.1).



Рис.1. Каустика при отражении от окружности

Если мы имеем дело с параболой, то все лучи, параллельные ее оси, после отражения собираются в одной точке – фокусе параболы. Для окружности и для других зеркал это не так, отраженные лучи не сходятся в одной точке. Но когда на зеркало падает узкий пучок параллельных лучей, то после отражения он становится сходящимся. Иными словами, отраженный пучок целиком не сходится в одной точке, но

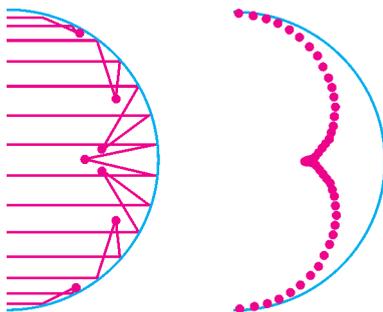


Рис.2. Слева на зеркало запущены 14 лучей, справа – 102 луча, и отмечены точки их попарного пересечения

узкие пучки, состоящие из близких лучей, будут сходящимися. Точки, в которых они сходятся, это точки концентрации энергии, именно из них и состоит каустика. Эти соображения позволят нам нарисовать каустику.

Запустим на круглое зеркало большое количество параллельных лучей. Разобьем их на пары и отметим точки

пересечения лучей в каждой паре после отражения (рис.2). Если число лучей увеличивать, то расстояния между точками попарного пересечения будут уменьшаться. Точки будут располагаться все ближе друг к другу и в пределе заполнят каустическую кривую.

Это один способ понять, как устроена каустика. Другой способ увидеть каустику – это нарисовать много лучей. На полученном таким образом рисунке каустика выделяется как кривая, которой касаются все отраженные лучи (рис.3). Это просто другое проявление той же самой концентрации световой энергии – каждый световой луч касается каустики, значит, проходит вдоль нее значительную часть своего пути и «отдает» ей большую часть своей энергии. Линия, которая касается каждой прямой из некоторого семейства прямых, является огибающей этого семейства. Так что каустика – это огибающая световых лучей. Можно сказать, что каустика представляет собой остов, на который нанизаны все световые лучи.

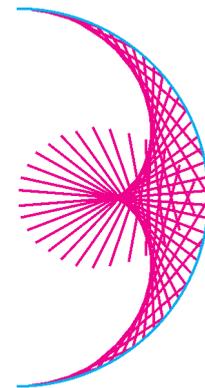


Рис.3. Каждый из отраженных лучей касается каустики

Как самим можно нарисовать предыдущие картинки?

Достроим зеркало до полной окружности (рис.4). Тогда из того, что «угол падения равен углу отражения», следует, что

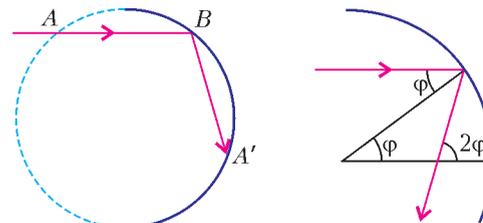


Рис.4. Хорды AB и BA' равны, отраженный луч направлен вдоль вектора $(-\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$

хорды AB и BA' , высекаемые падающим и отраженным лучами, равны между собой. Так что нужно с помощью циркуля нарисовать окружность с центром в точке B и радиусом AB и отметить ее пересечение с зеркалом – точку A' , а потом по линейке провести отраженный луч BA' . Если для рисования используется компьютер, то тут нужно знать, что горизонтальный (идущий параллельно оси абсцисс) световой луч, отраженный в точке единичной окружности $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ с угловой координатой φ , направлен вдоль вектора $(-\cos 2\varphi, -\sin 2\varphi)$. Это позволяет нарисовать все отраженные лучи. А если мы еще хотим добраться от окружности до каустики, то расстояние, которое нужно пройти вдоль этого вектора, равно $(\cos \varphi)/2$. Таким образом, точки, лежащие на каустике, будут иметь координаты

$$\left(\cos \varphi - \frac{\cos \varphi}{2} \cos 2\varphi, \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{2} \sin 2\varphi \right).$$

Это хорошо известная кривая (ее описывает фиксированная точка окружности, катящейся снаружи по большей в два раза окружности), она имеет собственное имя – нефроида.

Каустики в пространстве (3D каустики)

Все гораздо сложнее и гораздо интереснее в трехмерном пространстве. Там на каждом отраженном луче есть две точки концентрации энергии. В этом смысле можно сказать,

что каустическая поверхность в пространстве состоит из двух листов.

В качестве примера возьмем отражающую поверхность вида

$$z = x^2 + 2y^2$$

и осветим ее сверху пучком, идущим параллельно оси z . Если ограничиться плоскостью $y = 0$, то мы имеем отражение от параболы $z = x^2$, а в плоскости $x = 0$ отражение идет от параболы $z = 2y^2$. Это разные параболы, и лучи от них сфокусируются на разных высотах, в разных точках оси z . Одна из точек будет лежать на одном листе каустической поверхности, другая – на другом.

В последние годы в Интернете появились фотографии ярких четырехугольных звезд на стенах домов (рис.5). Это



Рис.5. Отражение от пластиковых окон

результат отражения солнечного света от пластиковых окон из расположенных напротив домов. В пластиковых окнах промежутки между стеклами герметизируются, и оттуда частично выкачивается воздух. За счет перепада давления стекла деформируются внутрь стеклопакета и приобретают вид, представленный на рисунке 6 (изображение сильно растянуто вдоль вертикальной оси). Такую поверхность можно хорошо приблизить графиком функции

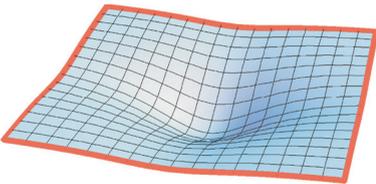


Рис.6. За счет перепада давления стекла прогибаются внутрь

$$z = -\frac{k}{(1 + mx^2)(1 + my^2)},$$

подобрав соответствующие постоянные k и m .

Если ограниченный кусок такой поверхности – «окно» – осветить падающим сверху пучком параллельных лучей, а на пути отраженных лучей поставить экран, то при небольшом удалении от окна мы увидим на экране картину, основным фрагментом которой служит восьмиугольная звезда (рис. 7,а). При большем удалении экрана мы увидим на нем

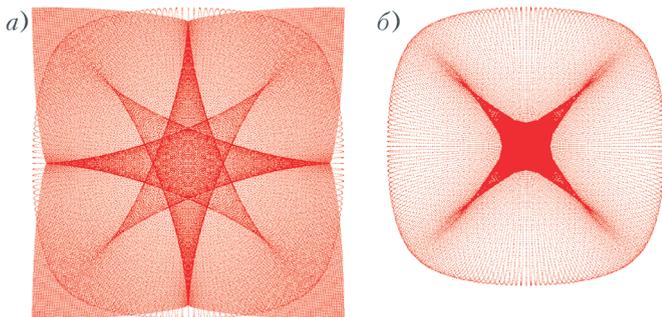


Рис.7. Изображение на экране – стене дома – при малом удалении (а) и при большем удалении (б)

четырёхугольную звезду на фоне менее яркого овала (рис.7,б), что соответствует реальным фотографиям. Четыре отсутствующих по сравнению с левым рисунком луча оказались отрезанными от звезды из-за того, что мы рассматриваем отражение только от ограниченного куска поверхности – от квадратного окна.

Теперь нарисуем саму каустическую поверхность, соответствующую этой оптической картине. Она на самом деле состоит из двух листов. На рисунке 8 цветом закодировано

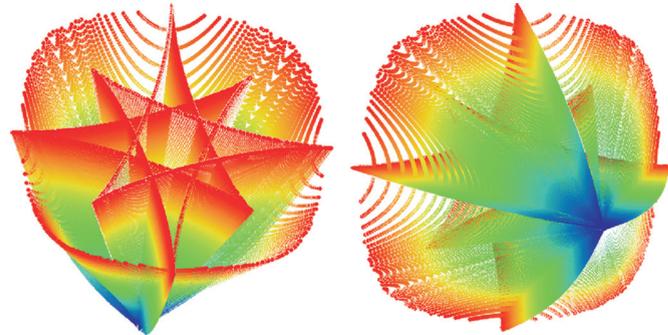


Рис.8. Два вида на каустическую поверхность

удаление точек каустики от отражающей поверхности: синие точки находятся ближе к ней, красные – дальше от нее. Сечение одного из листов каустики – восьмиугольная звезда, сечение другого – граница окружающего звезду овала.

Каустики могут образовываться не только при отражении, но и при преломлении света, скажем на поверхности воды. На фотографиях, воспроизведенных на рисунке 9, солнеч-

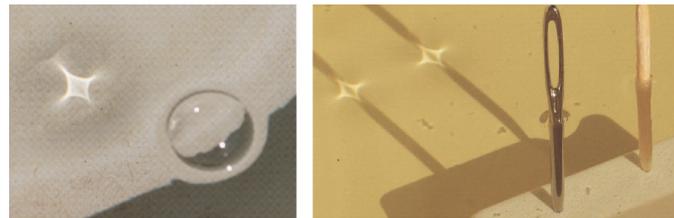


Рис.9. Каустики, возникающие при преломлении света, самый яркий элемент – четырехугольная звезда

ные лучи преломляются либо на воздушном пузырьке, либо на мениске, возникающем из-за поверхностного натяжения на иголке, погруженной в воду. И тут и там на дне мы видим небольшую четырехугольную звезду.

Смоделируем это явление, задав преломляющую поверхность (рис.10) уравнением

$$z = e^{-k(x^2+y^2)}.$$

Зафиксируем постоянную k и угол падения солнечных лучей α и вспомним, что для воды показатель преломления $n = 1,33$. С помощью закона преломления $\sin \alpha = n \sin \beta$ можно рассчитать направление преломленных лучей – угол β – и, значит, построить картину, которую формируют лучи на экране, расположенном под поверхностью воды – на дне сосуда. Отчетливо видна та же самая асимметричная четырехугольная звезда (рис. 11), что и на фотографии (см. рис.9).



Рис.10. Вздутие на поверхности воды, имитирующее пузырек или мениск

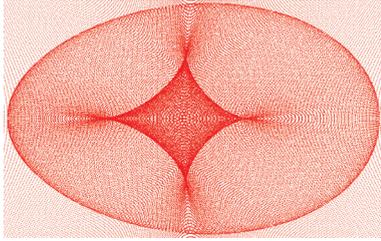


Рис.11. Изображение на экране – на дне сосуда

ней – граница овала, содержащего эту звезду.

В заключение – наши рекомендации для дальнейшего чтения.

1. Об оптических свойствах параболы и других кривых можно прочитать в книге А.Г.Дорфмана «Оптика конических сечений» (Популярные лекции по математике, выпуск 31. – М.: Физматлит, 1950).

А вот и соответствующая каустическая поверхность для преломленных лучей (рис.12). Синие точки расположены ближе к поверхности воды, красные более удалены от нее. Сечение внутренней поверхности – четырехугольная звезда, а внеш-

2. Как записать уравнение огибающей, можно узнать в книге В.Г.Болтянского «Огибающая» (Популярные лекции по математике, выпуск 36. – М.: Физматлит, 1961).

3. Наконец, об особенностях устройства каустических кривых и каустических поверхностей вы можете прочитать в книге В.И.Арнольда «Теория катастроф» (М.: Наука, 1990).



Рис.12. Каустическая поверхность, образующаяся при преломлении на воздушном пузырьке

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Неравенство Коши в задачах по физике

В. ГРЕБЕНЬ

ИЗ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ ИЗВЕСТНО ТАКОЕ неравенство:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ или } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

– среднее арифметическое двух неотрицательных чисел a и b не меньше, чем их среднее геометрическое, причем равенство достигается при $a = b$. Это неравенство называют неравенством Коши. Полезно знать некоторые следствия из него. Во-первых, произведение двух неотрицательных переменных, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение тогда, когда эти переменные равны друг другу. Во-вторых, аналогично, наименьшее значение суммы двух неотрицательных переменных, произведение которых постоянно, достигается при равенстве переменных.

Рассмотрим применение неравенства Коши при решении конкретных задач по физике.

Задача 1. С какой минимальной начальной скоростью $v_{0\min}$ следует бросить под углом α к горизонту камень, чтобы он достиг высоты h ? Чему равно время подъема камня t до этой высоты?

Решение. Совместим начало отсчета вертикальной оси OY с точкой бросания. Тогда уравнение движения камня по

вертикали примет вид

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент, когда камень находится на указанной высоте, $y = h$. Выразим из уравнения движения начальную скорость v_0 и применим неравенство Коши:

$$v_0 = \frac{gt}{2 \sin \alpha} + \frac{h}{t \sin \alpha} \geq 2\sqrt{\frac{gt}{2 \sin \alpha} \frac{h}{t \sin \alpha}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin \alpha}.$$

Отсюда находим минимальную начальную скорость камня:

$$v_{0\min} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin \alpha},$$

причем минимум достигается при условии

$$\frac{gt}{2 \sin \alpha} = \frac{h}{t \sin \alpha}.$$

Из этого условия можно узнать время подъема камня на высоту h :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Задача 2. Конькобежец проходит дистанцию $l = 500$ м с постоянной скоростью v , а затем тормозит с ускорением $a = 0,05$ м/с². При какой скорости v время движения конькобежца до остановки наименьшее?

Решение. Время движения, очевидно, состоит из двух слагаемых: времени движения с постоянной скоростью и времени равнозамедленного движения до полной остановки:

$$t = \frac{l}{v} + \frac{v}{a} \geq 2\sqrt{\frac{l}{v} \frac{v}{a}} = 2\sqrt{\frac{l}{a}}.$$

Понятно, что наименьшее время движения

$$t_{\min} = 2\sqrt{\frac{l}{a}} = 200 \text{ с} \approx 3,3 \text{ мин}$$

достигается при равенстве слагаемых, т.е. при

$$v = \sqrt{la} = 5 \text{ м/с}.$$

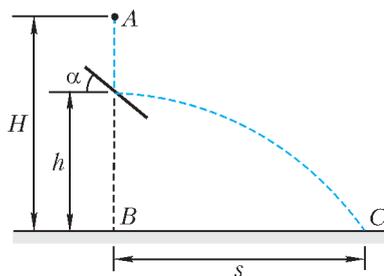


Рис. 1

Задача 3. Небольшой шарик свободно падает из точки A на массивную плиту, ориентированную под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту (рис.1). После упругого отражения от плиты шарик падает на поверхность земли в точке C на расстоянии s от вертикальной прямой AB . На какой высоте h необходимо расположить плиту (не меняя ее ориентации), чтобы расстояние s было максимальным, если $AB = H$? Чему равно s ? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Исходя из закона сохранения энергии, определим скорость шарика перед ударом о плиту:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(H - h), \quad v = \sqrt{2g(H - h)}.$$

После удара скорость шарика по модулю останется неизменной, но направление изменится на горизонтальное. По горизонтали шарик пролетит расстояние $s = vt$, где t – время падения шарика на землю после удара, а по вертикали – $h = \frac{gt^2}{2}$. Тогда

$$s = \sqrt{2g(H - h)} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H - h)} \leq h + (H - h) = H = \text{const}.$$

Если сумма слагаемых постоянна, то среднее геометрическое достигает максимума при равенстве множителей:

$$h = H - h, \quad \text{откуда } h = \frac{H}{2}.$$

Задача 4. Даны n гальванических элементов (рис.2) с электродвижущей силой каждого \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r . Все элементы соединены в k групп по

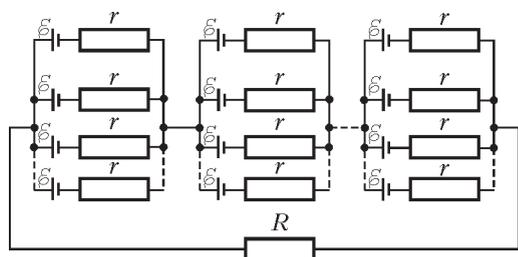


Рис. 2

n/k элементов в группе, причем в каждой группе элементы соединены параллельно, а группы между собой – последовательно. Чему должно быть равно k , чтобы получить максимальную силу тока во внешнем сопротивлении R ?

Решение. Зная, что при параллельном соединении одинаковых элементов электродвижущая сила не изменяется, а внутреннее сопротивление уменьшается пропорционально числу элементов, найдем, что каждую группу можно заменить одним элементом с электродвижущей силой \mathcal{E} и внутренним сопротивлением kr/n . Далее, приняв во внимание, что при последовательном соединении электродвижущая сила и внутреннее сопротивление возрастают пропорционально числу элементов, получим, что в цепи электродвижущая сила будет $k\mathcal{E}$, а внутреннее сопротивление k^2r/n . Согласно закону Ома для полной цепи, ток в цепи

равен

$$I = \frac{k\mathcal{E}}{(k^2r/n) + R} = \frac{\mathcal{E}nk}{rk^2 + nR}.$$

Очевидно, что наибольшая сила тока будет при таком значении k , при котором дробь $\frac{1}{kr + \frac{nR}{k}}$ принимает наибольшее значение, а для этого знаменатель дроби должен быть минимальным. Исходя из неравенства Коши, должно выполняться равенство

$$kr = \frac{nR}{k}, \quad \text{откуда } k = \sqrt{\frac{nR}{r}}.$$

При этом

$$I_{\text{max}} = \frac{n\mathcal{E}}{2\sqrt{rnR}} = \frac{\mathcal{E}}{2} \sqrt{\frac{n}{rR}}.$$

Интересно, а чему равно в этом случае внутреннее сопротивление батареи? Оно, как мы видели, есть

$$r_{\text{бат}} = \frac{rk^2}{n} = r \frac{nR}{nr} = R.$$

Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу: ток батареи оказывается максимальным тогда, когда ее внутреннее сопротивление равно внешнему.

Задача 5 (XLI Всероссийская олимпиада школьников по физике). Пассажирский поезд длиной l стоит на первом пути. В последний вагон сидел Дядя Федор (герой книги Э. Успенского «Каникулы в Простоквашино») и ожидал письмо, которое ему должен был передать Шарик от кота Матроскина. В тот момент, когда поезд тронулся, на привокзальной площадке как раз напротив первого вагона появился Шарик (рис.3). Он определил, что расстояние до последнего вагона равно L . С какой минимальной скоростью v_0 должен бежать пес, чтобы передать письмо, если поезд движется с постоянным ускорением a ?

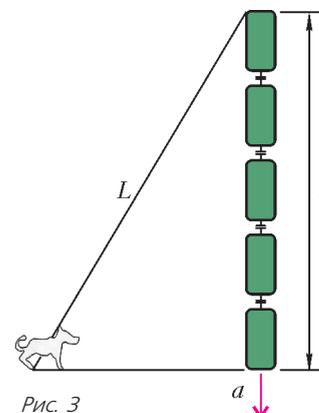


Рис. 3

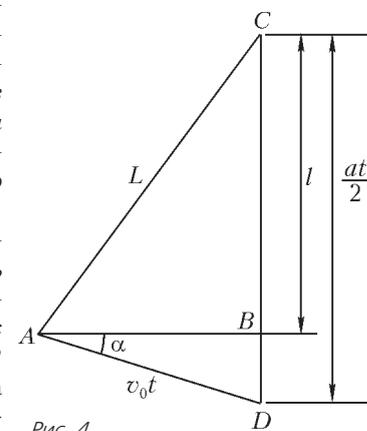


Рис. 4

Решение. Пусть встреча Шарика с последним вагоном произошла в точке D (рис.4). Треугольники ABC и ABD – прямоугольные. Тогда, используя теорему Пифагора, можно записать

$$AB^2 = AC^2 - CB^2 = AD^2 - DB^2,$$

или

$$L^2 - l^2 = v_0^2 t^2 - \left(\frac{at^2}{2} - l\right)^2.$$

Отсюда выразим квадрат начальной скорости:

$$v_0^2 = \frac{L^2}{t^2} + \frac{a^2 t^2}{4} - al.$$

Для того чтобы скорость v_0 была минимальной, необходимо, чтобы сумма $\frac{L^2}{t^2} + \frac{a^2 t^2}{4}$ принимала минимальное значение. Используем неравенство Коши:

$$\frac{L^2}{t^2} + \frac{a^2 t^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{L^2 a^2 t^2}{t^2 \cdot 4}} = La$$

и получаем

$$v_0 = \sqrt{a(L-l)}.$$

Обратим внимание на то, что минимальная скорость достигается при условии

$$\frac{L^2}{t^2} = \frac{a^2 t^2}{4}, \text{ или } L = \frac{at^2}{2}.$$

Значит, $DC = CA = L$, т.е. треугольник ACD – равнобедренный, и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{L-l}{\sqrt{L^2-l^2}}.$$

Получили, что Шарику следует бежать под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{L-l}{\sqrt{L^2-l^2}}$ к AB со скоростью $v_0 = \sqrt{a(L-l)}$.

Задача 6. Определите, при каком минимальном коэффициенте трения μ однородного тонкого стержня о пол человек может медленно без проскальзывания поднять его с пола до вертикального положения, прилагая к концу стержня силу, перпендикулярную ему.

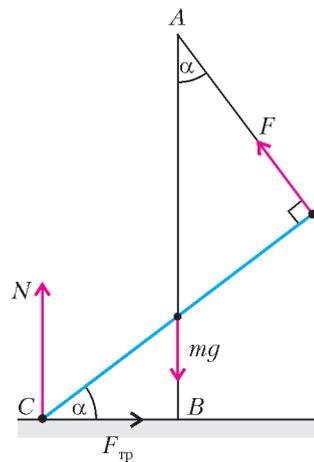


Рис. 5

Решение. Найдем зависимость минимального значения коэффициента трения $\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N}$, где N – вертикальная сила реакции пола, при котором не будет проскальзывания, от угла подъема стержня α (рис.5). В качестве оси вращения возьмем точку A пересечения линий, вдоль которых действуют силы \vec{F} и $m\vec{g}$. Относительно точки A моменты приложенной силы \vec{F} и силы тяжести $m\vec{g}$ равны нулю, поскольку плечи этих сил равны нулю. Определим плечо силы трения $F_{\text{тр}}$, т.е. длину отрезка AB . Пусть длина стержня l , тогда

$$AB = \frac{l}{2} \sin \alpha + \frac{l/2}{\sin \alpha} = \frac{l}{2} \left(\sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

Плечо силы реакции \vec{N} – это отрезок CB :

$$CB = \frac{l}{2} \cos \alpha.$$

Запишем условие равновесия стержня относительно выбранной точки A :

$$N \frac{l}{2} \cos \alpha = F_{\text{тр}} \frac{l}{2} \left(\sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N} &= \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}. \end{aligned}$$

Дробь принимает максимальное значение, когда знаменатель минимален. Воспользуемся неравенством Коши:

$$2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \geq 2\sqrt{2 \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$\mu \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,35.$$

В ходе подъема трубы μ не превосходит 0,35. Максимальное значение μ требуется при $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. при $\alpha \approx 35,26^\circ$.

Задача 7. Каков максимальный угол θ упругого рассеяния α -частицы на дейтроне? Дейтрон – ядро изотопа водорода дейтерия, состоит из протона и нейтрона, α -частица – ядро гелия, состоит из двух протонов и двух нейтронов. Считайте, что масса дейтрона в два раза меньше массы α -частицы.

Решение. Пусть m_1 и m_2 – массы α -частицы и дейтрона соответственно, v_0 и v_1 – скорости α -частицы до и после столкновения, v_2 – скорость дейтрона после столкновения, δ и φ – углы отклонения α -частицы и дейтрона от направления движения α -частицы до столкновения (рис.6). Запишем закон сохранения импульса в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

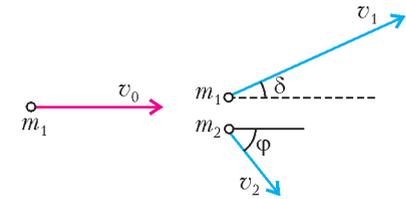


Рис. 6

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 \cos \delta + m_2 v_2 \cos \varphi, \quad m_1 v_1 \sin \delta = m_2 v_2 \sin \varphi,$$

или, поскольку $m_1 = 2m_2$,

$$2v_0 = 2v_1 \cos \delta + v_2 \cos \varphi, \quad 2v_1 \sin \delta = v_2 \sin \varphi.$$

Избавимся от угла φ . Для этого из первого равенства выразим $v_2 \cos \varphi$ и возведем в квадрат, после чего сложим с квадратом второго равенства:

$$4(v_0 - v_1 \cos \delta)^2 = v_2^2 \cos^2 \varphi, \quad 4v_1^2 \sin^2 \delta = v_2^2 \sin^2 \varphi,$$

откуда

$$4v_1^2 \sin^2 \delta + 4v_0^2 - 8v_0 v_1 \cos \delta + 4v_1^2 \cos^2 \delta = v_2^2,$$

или

$$4v_1^2 + 4v_0^2 - 8v_0 v_1 \cos \delta = v_2^2.$$

Теперь применим закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \text{ или } 2v_0^2 = 2v_1^2 + v_2^2.$$

Отсюда и из последнего выражения закона сохранения импульса после упрощения получим

$$3v_1^2 - 4v_0 v_1 \cos \delta + v_0^2 = 0,$$

откуда найдем

$$\cos \delta = \frac{3v_1^2 + v_0^2}{4v_0v_1} = \frac{1}{4} \left(\frac{3v_1}{v_0} + \frac{v_0}{v_1} \right).$$

Применим неравенство Коши:

$$\cos \delta = \frac{1}{4} \left(\frac{3v_1}{v_0} + \frac{v_0}{v_1} \right) \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3v_1 v_0}{v_0 v_1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как функция $\cos \delta$ на промежутке $[0; \pi]$ убывающая, для максимального угла рассеяния получим

$$\theta = \delta_{\max} = \frac{\pi}{6}.$$

Задача 8. В широкий сосуд с жидкостью частично погружается плоский конденсатор. Конденсатор подключен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора постоянную разность потенциалов U . Расстояние между пластинами d , плотность жидкости ρ , ее диэлектрическая проницаемость ϵ . На какую высоту h поднимается жидкость в конденсаторе?

Решение. Обозначим высоту пластин через a , а размер пластин в направлении, перпендикулярном рисунку 7, через b . Рассмотрим полную энергию системы в зависимости от высоты h жидкости в конденсаторе. Очевидно, что при некотором значении h энергия системы будет минимальной. Это и будет установившаяся высота подъема жидкости.

Наша система состоит из источника тока, конденсатора и жидкости в гравитационном поле Земли. Энергию, запасенную в батарее, можно записать в виде

$$W_1 = W_0 - CU^2,$$

где W_0 — первоначальный запас энергии батареи, а CU^2 — это энергия, которую израсходовала батарея, заряжая конденсатор до напряжения U . Прежде чем находить энергию конденсатора W_2 , определим его емкость при подъеме жидкости на высоту h . Мы имеем систему двух параллельно соединенных конденсаторов, поэтому общая емкость равна их сумме:

$$C = \frac{\epsilon_0(a-h)b}{d} + \frac{\epsilon\epsilon_0bh}{d} = \frac{\epsilon_0b}{d}(a+h(\epsilon-1)).$$

Тогда

$$W_2 = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0bU^2}{2d}(a+h(\epsilon-1)).$$

Так как сосуд достаточно широкий, после втягивания части жидкости в конденсатор уровень жидкости в самом сосуде не изменился заметным образом. Центр масс жидкости между обкладками находится на высоте $\frac{h}{2}$, если за нулевой уровень принять поверхность жидкости в сосуде. Потенциальная энергия поднятой жидкости составляет

$$W_3 = \frac{\rho g d b h^2}{2}.$$

Таким образом, полная энергия нашей системы равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = W_0 - W_2 + W_3 = W_0 - \frac{\epsilon_0 b a U^2}{2d} - \frac{\rho g b d}{2} h \left(\frac{\epsilon_0(\epsilon-1)U^2}{\rho g d^2} - h \right).$$

Так как нас интересует минимум энергии, то выражение $h \left(\frac{\epsilon_0(\epsilon-1)U^2}{\rho g d^2} - h \right)$ должно принимать максимальное значение. Произведение двух чисел, сумма которых неизменна:

$$h + \left(\frac{\epsilon_0(\epsilon-1)U^2}{\rho g d^2} - h \right) = \frac{\epsilon_0(\epsilon-1)U^2}{\rho g d^2}$$

принимает максимальное значение в случае их равенства:

$$h = \frac{\epsilon_0(\epsilon-1)U^2}{\rho g d^2} - h.$$

Откуда находим искомую высоту жидкости в конденсаторе:

$$h = \frac{\epsilon_0(\epsilon-1)U^2}{2\rho g d^2}.$$

Упражнения

1. С какой минимальной по модулю скоростью v_{\min} нужно бросить с горизонтальной поверхности земли камень, чтобы он упал на землю на расстоянии $l = 40$ м от точки бросания? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Два железнодорожных пути сходятся в городе под углом $\alpha = 60^\circ$ (рис.8). Со станции, находящейся на первом пути на расстоянии $l_1 = 32$ км от города, вышел по направлению к нему поезд А. В то же время со станции, находящейся на втором пути на расстоянии $l_2 = 50$ км от города, вышел другой поезд В по направлению к тому же городу, но со скоростью, вдвое большей скорости первого поезда. Найдите, где будет поезд В во время наименьшего расстояния между ним и поездом А, и определите это расстояние.

3. Шайба, скользящая по гладкому полу со скоростью $v_0 = 12$ м/с, поднимается на закрепленный трамплин, верхняя часть которого горизонтальна, и соскальзывает с него (рис.9). При какой высоте трамплина h дальность полета шайбы s будет максимальной? Какова эта дальность? Потерями механической энергии шайбы при движении по трамплину пренебречь. До окончания трамплина шайба движется не отрываясь от его поверхности.

4. Под каким углом α к горизонту нужно бросить с горизонтальной поверхности земли камень, чтобы он при движении все время удалялся от точки бросания? Сопротивление воздуха не учитывать.

5. Каким должен быть наименьший угол наклона крыши дома α , чтобы дождевая вода с нее стекала как можно быстрее, если коэффициент трения равен μ ?

6. Поезд начинает двигаться с постоянным ускорением a вдоль прямолинейного участка пути. На расстоянии l от последнего вагона на перпендикуляре к направлению движения поезда находится пассажир. С какой минимальной скоростью может бежать пассажир, чтобы догнать поезд? В каком направлении он должен бежать в этом случае? Движение пассажира считать равномерным.

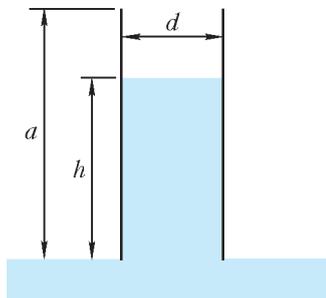


Рис. 7

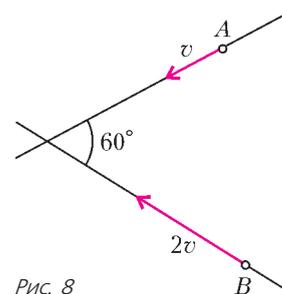


Рис. 8

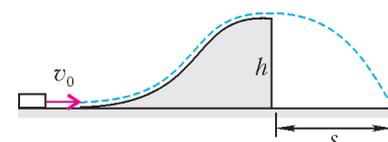


Рис. 9

Заочная школа СУНЦ НГУ

При Новосибирском государственном университете в составе Специализированного учебно-научного центра физико-математического и химико-биологического профиля (СУНЦ НГУ) уже много лет работает созданная по инициативе академика М.А.Лаврентьева Заочная школа для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ. Организованная в 1963 году как физико-математическая, в настоящее время Заочная школа (ЗШ) насчитывает 9 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое, русского языка, психологии, английского, немецкого и французского языков. Основные задачи ЗШ: оказание помощи в формировании и развитии у школьников интереса к естественным и точным наукам; предоставление возможности учащимся общеобразовательных школ, расположенных в удаленных от научных центров пунктах и территориях, углубленно заниматься математикой, физикой, химией, биологией, иностранными языками; повышение уровня преподавания естественно-научных предметов в школе; методическая помощь учителям в преподавании узловых пунктов школьной программы и факультативных курсов.

Ежегодно Олимпиадный комитет СО РАН приглашает лучших учеников ЗШ в Летнюю школу, которая проводится в Новосибирском Академгородке с 3 по 23 августа, для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели обычных и гимназических классов в школах России и стран СНГ могут вести факультативные занятия по программам Заочной школы СУНЦ НГУ. Занятия по математике проводятся начиная с 6 класса, по физике и химии – начиная с 9 класса, по биологии – с 10 класса. Факультативные группы могут быть созданы в любом общеобразовательном учреждении, если преподаватель общеобразовательного учреждения сообщит в ЗШ СУНЦ НГУ о своем желании организовать факультативную группу и предоставит поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью, с указанием класса текущего учебного года), телефон, факс и e-mail. Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как факультативные занятия по предоставлению ЗШ соответствующих сведений. Факультативные группы по химии, биологии и физике обучаются бесплатно.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются все желающие, независимо от возраста. Прием в школу ведется круглогодично. Бесплатное обучение сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах, детей-инвалидов. Для учеников сельских школ и детей из малообеспеченных многодетных семей устанавливается более низкий уровень оплаты.

Чтобы стать учеником ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых вы хотите учиться, свою фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой подробный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание оформляется в обычной ученической тетради и высылается простой бандеролью. Можно присылать работы и по электронной почте. Подробную информацию и первые задания всех отделений ЗШ СУНЦ НГУ можно найти на сайте: <http://zfmsn.nsu.ru>

Наш почтовый адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-4066, 339-4066

E-mail: distant@sesc.nsu.ru

Ниже приводится первое задание для учащихся 9-11

классов математического и физического отделений Заочной школы СУНЦ НГУ.

Первое задание

Математическое отделение

9 класс

1. Докажите, что натуральное число, следующее за произведением четырех последовательных натуральных чисел, является квадратом целого числа.

2. Докажите, что если m и n – два натуральных числа, то одно из чисел $\sqrt[m]{m}$ и $\sqrt[n]{n}$ не больше чем $\sqrt[3]{3}$.

3. Пусть окружности O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B , точка X лежит на дуге окружности O_1 вне окружности O_2 , M и N – точки пересечения прямых XA и XB с окружностью O_2 . Докажите, что длина хорды MN не зависит от положения точки X .

4. Три окружности, проходящие через точку M , пересекаются попарно в точках A , B и C . Через точку A проведена прямая, которая пересекает проходящие через A окружности в точках D и E . Докажите, что прямые BD и CE пересекаются в точке, лежащей на третьей окружности.

5. Можно ли в ряду чисел $1, 2, 3, \dots, 100$ так расставить знаки «+» и «-» между числами, что в результате сложений и вычитаний получится число 2009?

6. Докажите, что

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2010^2} < 1.$$

10 класс

1. Решите систему уравнений

$$x = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad z = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

2. Найдите сумму

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2009}+\sqrt{2010}}.$$

3. Высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, делят его угол на четыре равные части. Найдите все углы треугольника.

4. Докажите, что если для углов треугольника ABC выполнено соотношение

$$1 + \cos \angle 2A + \cos \angle 2B + \cos \angle 2C = 0,$$

то треугольник прямоугольный.

5. Пусть a, b, c, d – длины последовательных сторон четырехугольника $ABCD$, m и n – длины его диагоналей. Докажите, что выполняется соотношение

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\angle A + \angle C).$$

6. Прямая произвольным образом раскрашена в два цвета. Докажите, что на ней обязательно найдется отрезок, у которого оба конца и середина окрашены в один цвет.

11 класс

1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD площадь треугольника OAB равна S_1 и площадь треугольника OCD равна S_2 , где O – точка пересечения диагоналей. Найдите площадь трапеции.

2. Докажите, что $\sqrt[9]{9+4\sqrt{5}} - \sqrt[9]{9-4\sqrt{5}} = 1$.

3. Какую наибольшую площадь поверхности может иметь прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d ?

4. Докажите неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{1}{4}$.

5. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC . Докажите, что тогда для любой точки O плоскости выполняется равенство

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = 3OM^2 + \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

6. На плоскости даны 100 точек. Известно, что из любых четырех точек какие-то три лежат на одной прямой. Докажите, что все точки, кроме, быть может, одной, лежат на одной прямой.

Физическое отделение

9 класс

1. Шумахер прошел финишный отрезок гоночной трассы со скоростью 70 м/с. Виталий Петров появился на этом отрезке с задержкой на 1 с относительно Шумахера, но через 10 с после своего появления догнал его и пришел первым. С какой скоростью двигался россиянин?

2. Две одинаковые банки заполнили одну водой, а другую песком. Из первой банки воду начали выливать во вторую – она просачивалась в песок. Когда вода показалась над песком и стала капать за край банки, лить воду перестали. При этом в первой банке осталось $\frac{2}{3}$ первоначального объема воды. Какой объем песка нужно насыпать в эту банку, чтобы она снова оказалась полной?

3. Из стоящей на электрической плитке кастрюли с водой за час кипения испарилась половина воды. Недостаток воды восполнили куском льда и оставили плитку включенной. Через какое время вода в кастрюле снова закипит? Температура льда 0°C , удельная теплоемкость воды 4,2 Дж/(г·град), удельная теплота плавления льда 330 Дж/г, удельная теплота парообразования воды 2250 Дж/г.

4. Из проволоки изготовили правильный треугольник. Сопротивление между серединами двух его сторон равно R . Чему будет равно сопротивление между этими точками, если середины всех сторон треугольника соединить отрезками этой же проволоки?

10 класс

1. Два зайца состязаются в беге. Вначале стартовал первый заяц и бежал с постоянным ускорением. Второй заяц замешкался на старте на время τ , но бежал с большим ускорением и догнал первого, причем в этот момент его скорость была в 2 раза больше, чем у первого зайца. Через какое время после выстрела стартового пистолета это произошло?

2. Два мяча бросили одновременно со скоростью v – один сверху вниз с высоты h , другой вверх с нулевого уровня. На какой высоте мячи столкнутся? Сопротивления воздуха нет.

3. В трубку в виде перевернутой буквы П налили воду. Затем в левое колено аккуратно налили масло (рис.1, слева), так что высота его столба оказалась h , а уровень жидкости

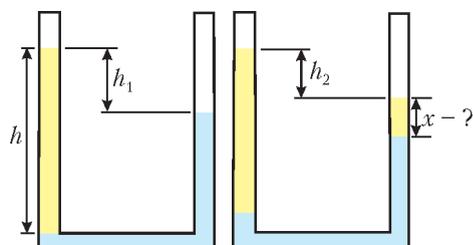


Рис. 1

в левом колене стал на h_1 выше, чем в правом. Потом трубку качнули, и некоторое количество масла попало в правое колено. При этом разница уровней жидкостей в левом и правом коленах стала h_2 (рис.1, справа). Определите высоту x столбика масла в правом колене.

4. По поверхности клина массой M с углом при основании α скользит брусок массой m . Коэффициент трения между бруском и клином μ , причем $\mu < \text{tg } \alpha$. Какое минимальное значение должен иметь коэффициент трения μ_1 между горизонтальной плоскостью и клином, чтобы клин по ней не проскальзывал?

5. Чаша массой M стоит на гладком горизонтальном основании рядом с вертикальной стенкой (рис.2). В чашу

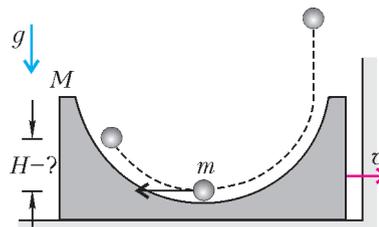


Рис. 2

падает тело массой m и скользит по ее поверхности. В момент времени, когда тело оказывается на дне, чаша со скоростью v упруго ударяется о стенку. На какую высоту H после этого поднимется тело? Трения нет.

11 класс

1. Решите задачу 1 для 10 класса.

2. Решите задачу 4 для 10 класса.

3. Расстояние между дном и поршнем, перекрывающим пробирку, равно $\frac{1}{5}$ ее высоты. Если пробирку медленно перевернуть, это расстояние увеличится в 3 раза. Во сколько раз нужно понизить давление воздуха, чтобы в перевернутом положении пробирки поршень выпал из нее? Температура не меняется.

4. Лампочка и два одинаковых сопротивления, величиной R каждое, подсоединили к источнику напряжения двумя

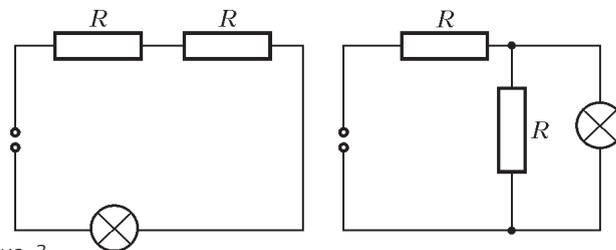


Рис. 3

способами, как показано на рисунке 3. В обоих случаях накал лампочки один и тот же. Чему равно сопротивление включенной лампочки?

5. Две бусинки, массой m и зарядом q каждая, нанизаны на тонкое гладкое кольцо массой $2m$ и диаметром D . Кольцо вместе с бусинками движется со скоростью v и упруго ударяется о плоскость (рис.4). На какое минимальное расстояние сойдутся бусинки после удара, если перед ударом они находились на диаметре кольца, параллельном плоскости?

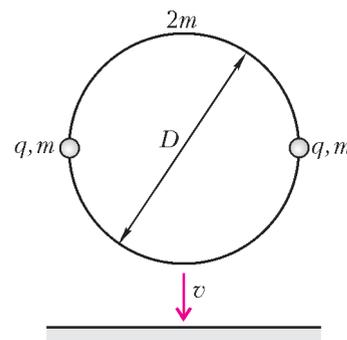


Рис. 4

XVIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии мэрии города Неа Муданья в Северной Греции, МГУ им. М.В.Ломоносова, Фонда некоммерческих программ «Династия» и при поддержке компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон» и «1С», Издательского дома «Первое сентября» и журнала «Квант» провел очередную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон».

Олимпиада проходила в Греции с 4 по 11 октября 2009 года. На олимпиаду приехали участники из разных регионов России, Казахстана и Норвегии. Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике и истории научных идей и открытий. В олимпиаде также участвовали школьники, интересующиеся экологией и биологией.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2009» по фундаментальным наукам в командном зачете стала команда лицея 2 города Альметьевска. Ей был вручен главный приз соревнований – Суперкубок. Команда была также лучшей в турах по истории научных идей и открытий, физике и математике. Второе место в общем зачете заняла команда Классического лицея 1 города Ростова-на-Дону. Она заняла также второе место в туре по математике и третье место в туре по истории научных идей и открытий. На третье место вышла команда из города Павлодара (Казахстан), которая стала также второй в туре по истории научных идей и открытий.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стал Александр Бескровный, ученик 11 класса лицея 2 города Альметьевска. Ему были вручены большая золотая медаль, малая золотая медаль за первое место по физике и малая бронзовая медаль за третье место по математике. Вторым призером в общем зачете стала Жадра Шайкенова, ученица 11 класса из Павлодара, ей были вручены большая серебряная медаль и малая серебряная медаль за второе место по физике. Большую бронзовую медаль в общем зачете завоевал Ринат Садыков, ученик 11 класса лицея 2 из Альметьевска. В индивидуальном зачете по математике лучшим стал Тимур Хусаенов, ему была вручена малая золотая медаль, вторым – Юрий Пастухов, он получил малую серебряную медаль (оба – ученики 11 класса лицея 2 из Альметьевска). Алексей Казаков, ученик 10 класса лицея 2 города Бугульмы, был награжден за третье место по физике малой бронзовой медалью.

Все победители и призеры получили подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XIX Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2010 года в Греции.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru

ПИСЬМЕННЫЙ ИНДИВИДУАЛЬНЫЙ ТУР

Математика

1. Несколько школьников ходили за грибами. Набравший наибольшее количество грибов собрал $1/5$ часть от общего количества собранных грибов, а набравший наименьшее количество – $1/7$ часть. Сколько было школьников?

2. Высота AH треугольника ABC равна его медиане BM . На продолжении стороны AB за точку B отложили отрезок BD , равный стороне AB . Найдите угол BCD .

3. Решите следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 - y = 6, \\ y^3 - z = 6, \\ z^3 - x = 6. \end{cases}$$

4. Действительные числа x , y и z таковы, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1.$$

Найдите $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.

5. В однокруговом¹ волейбольном турнире участвуют 8 команд. а) Можно ли утверждать: найдутся такие команды A , B , C и D , что A выиграла у B , C и D , B выиграла у C и D , а C выиграла у D ? б) Верно ли утверждение пункта а) для турнира 7 команд? (В волейболе нет ничьих.)

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F – середины сторон BC и CD соответственно. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника ABD , если площади треугольников ABE , CEF , AEF и AFD в некотором порядке образуют четверку последовательных натуральных чисел.

7. Двое играют в такую игру. Перед ними – лист клетчатой бумаги размером $m \times n$ клеток ($m \neq n$). Каждый своим ходом выбирает некоторый квадрат, образованный линиями сетки, и закрашивает его (разумеется, закрашиваемый квадрат должен состоять из еще не окрашенных клеток). Кто выиграет при правильной игре, начинающий или его партнер, если: а) числа m и n имеют одинаковую четность (т.е. либо оба четны, либо оба нечетны); б) n четно, m нечетно, причем $n + 1 \geq m$?

Физика

Задача 1. Аргонавты. Аргонавты плывут за Золотым руном. Они приближаются к Колхиде. Их корабль «Арго» длиной $L = 40$ м плывет перпендикулярно линии берега со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Эллиам нужно как можно скорее вступить в бой с драконом, охраняющим Золотое руно, поэтому им хочется выпрыгнуть из корабля прямо на берег, а не в море. Как далеко проскользит «Арго» по берегу, если коэффициент трения его днища о поверхность земли $\mu = 0,5$, а трением о воду можно пренебречь? Сколько времени ему

¹ Каждая команда сыграла одну игру с каждой из остальных.

на это понадобится? Глубина у берега достаточна для того, чтобы корабль не касался дна.

Задача 2. Заряд и плоскость. Точечный заряд q находится на расстоянии h от проводящего полупространства. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы удалить заряд на очень большое расстояние?

Задача 3. Тепловой насос. Для отопления помещений используют в основном два способа. Первый способ заключается в том, что в помещении располагается нагревательный прибор – назовем его «печь», – в котором сжигается топливо или используется электронагреватель. Будем считать такую отопительную систему идеальной в том смысле, что все количество теплоты без потерь поступает от печи в отапливаемое помещение. Во втором способе используются связанные друг с другом печь, тепловой двигатель и холодильная машина. Одна часть количества теплоты от печи поступает непосредственно в отапливаемое помещение, а другая затрачивается на работу, совершаемую двигателем. Вся эта работа используется для приведения в действие холодильной машины, которая отбирает тепло у окружающей среды вне помещения и передает ее помещению. Покажите, что во втором способе общее количество теплоты, полученное помещением, не меньше, чем в первом.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Карно для циклического процесса в термодинамической системе с n нагревателями

и холодильниками: $\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0$, где Q_i – количество теплоты, полученное от нагревателя (или отданное холодильнику), T_i – температура нагревателя (холодильника).

Задача 4. Перегородка с отверстием. Цилиндрический сосуд с идеальным газом разделен теплопроводящими перегородками на три отсека (рис.1). В каждой перегородке есть отверстие, размер которого мал по сравнению с длиной свободного пробега молекул газа. Температуры и давления газа в отсеках поддерживаются постоянными. Температуры равны T_1, T_2, T_3 , давление в первом отсеке p_1 известно. Найдите давления p_2 и p_3 во втором и третьем отсеках.

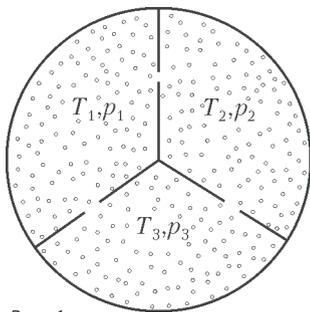


Рис. 1

Задача 5. Муха в пробирке. В закрытой с двух сторон вертикальной цилиндрической прозрачной трубке массой $M = 20$ г и длиной $L = 2$ м на дне сидит муха массой $m = 1$ г. В некоторый момент времени муха взлетает вверх со скоростью $v_0 = 10$ м/с, и одновременно трубка начинает падать. Неподвижный наблюдатель замечает время, за которое муха долетит до «потолка» трубки. При этом трубка опустится на какое-то расстояние. На сколько отличается расстояние, пройденное трубкой за то же время, при условии, что муха остается сидеть на «полу» трубки?

Задача 6. Три шарика. Три одинаковых шарика, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной a , соединены друг с другом нитями. Заряд и масса каждого шарика равны q и m соответственно. Одну из нитей пережгли. Найдите максимальную скорость «среднего» шарика. Влиянием силы тяжести пренебречь (например, шарики лежат на гладкой поверхности).

Задача 7. Спутник. Определите период обращения спутника Земли по эллиптической орбите, апогей которой (максимальное удаление от центра Земли) равен утроенному радиусу Земли, а перигей (минимальное удаление от центра

Земли) равен радиусу Земли. Найдите также отношение скоростей в апогее и перигее.

УСТНЫЙ КОМАНДНЫЙ ТУР

Математика

1. Какую наибольшую сумму цифр может иметь восьмизначное число, делящееся на 8?

2. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AN , высота BH и серединный перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите угол A треугольника (угол BAC).

3. Существуют ли три натуральных числа, сумма которых равна 407, а произведение оканчивается на 6 нулей?

4. Мимо наблюдателя по шоссе проехали через равные промежутки времени с постоянными скоростями: сначала автобус, затем грузовик и, наконец, легковой автомобиль. Мимо другого наблюдателя они проехали через те же промежутки времени, но в другом порядке: сначала автобус, затем легковой автомобиль и потом грузовик. Найдите скорость автобуса, если скорость легкового автомобиля 60 км/ч, а грузовика 30 км/ч.

5. Верно ли, что из двенадцати различных двузначных чисел всегда можно выбрать два таких, что их разность записывается двумя одинаковыми цифрами?

6. Найдите сумму 50 различных натуральных чисел, ровно двадцать пять из которых не превосходят числа 50, а остальные – не больше 100, причем никакие два числа не отличаются ровно на 50.

7. Может ли дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами быть равным: а) 2010; б) 2011; в) 2012?

8. В четырехугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны AB . Что больше: $AD + BC$ или CD , если угол DMC – прямой?

9. Как известно, существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001! + 2, 1001! + 3, \dots, 1001! + 1001$). Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых имеется ровно 5 простых чисел?

10. Верно ли, что если для положительных чисел a и b выполнено неравенство $a + b < ab$, то $a + b > 4$?

11. Дан правильный 45-угольник. Можно ли в его вершинах расставить цифры 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы для любой пары цифр нашлась сторона, занумерованная этими цифрами?

12. Верно ли, что если $c(a + b + c) < 0$, то $b^2 - 4ac > 0$?

Физика

Задача 1. Магнит и гвозди. К горизонтально расположенному широкому плоскому торцу постоянного магнита хотят подвесить на небольшом расстоянии друг от друга два стальных гвоздя (рис.2). Как расположатся гвозди? Ответ поясните.

Задача 2. Дома. Вертикальны ли вертикальные стены домов? Землю считайте шарообразной. При постройке вертикальность стены проверяют отвесом (нитью с привязанным к ней грузом).

Задача 3. Тающая вода. В сосуд с водой бросают кусочки тающего льда при непрерывном помешивании. Вначале кусочки льда тают, но в некоторый момент лед перестает таять. Первоначальная масса

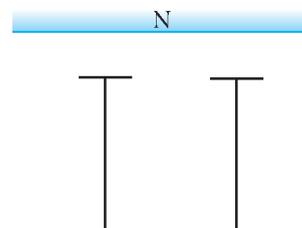


Рис. 2

воды в сосуде $m = 660$ г. На сколько увеличилась масса воды к моменту прекращения таяния льда, если первоначальная температура воды $t = 12,5$ °С? Потерями тепла пренебречь.

Задача 4. Неупругий удар. Найдите угол отскока шарика при угле падения $\alpha = 30^\circ$ на идеально гладкую поверхность, если при ударе шарик теряет половину кинетической энергии. Угол падения – это угол между нормалью к поверхности и траекторией шарика.

Задача 5. Волейбольный мяч. Волейболист снизу бьет по мячу так, что мяч летит вертикально вверх. Изменяется ли ускорение мяча в процессе полета? Если да, то укажите точки, где ускорение максимально и где минимально.

Задача 6. Цилиндры на горке. На наклонной плоскости находятся два соприкасающихся друг с другом цилиндра. Нижний цилиндр начинают медленно спускать без вращения. При этом в случае малого наклона плоскости к горизонту верхний цилиндр вращается, а в случае большого наклона скользит без вращения. Объясните явление.

Задача 7. Заряженные шарики. Металлический шарик радиусом $r_1 = 1$ см, заряженный до потенциала $\phi_1 = 270$ В, вносится внутрь полого металлического шара радиусом $r_2 = 10$ см, заряженного до потенциала $\phi_2 = 450$ В. Определите

заряды и потенциалы шаров после их соприкосновения.

Задача 8. Диодная цепь. В цепи, схема которой показана на рисунке 3, между точками 1 и 2 от внешнего источника создано переменное синусоидальное напряжение $u = U_0 \sin \omega t$. Какое напряжение установится между точками 3 и 4? Диоды считайте идеальными.

Рис. 3

Задача 9. Резисторы. Найдите силу тока, текущего через сопротивление r (рис.4), если все остальные сопротивления равны R , а напряжение равно U .

Задача 10. Бусинка на стержне. На невесомый жесткий стержень, шарнирно закрепленный одним концом, надели массивную бусинку, которая может скользить по нему без трения. Вначале стержень удерживали в горизонтальном положении, а бусинка находилась в расстоянии L от закрепленного конца. Затем стержень отпустили. Найдите зависимость угла, который составляет стержень с горизонталью, от времени.

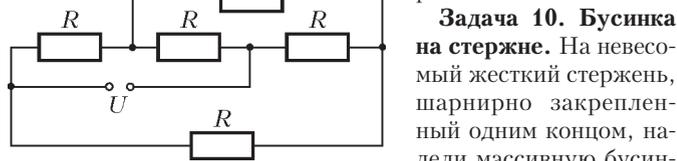


Рис. 4

Рис. 3

ИСТОРИЯ НАУЧНЫХ ИДЕЙ И ОТКРЫТИЙ

Математика

1. Математика Древнего Вавилона (VI–V вв. до н.э.) известна из расшифрованных клинописных текстов глиняных табличек. Некоторые таблички (можно предполагать, что это были учебные пособия) содержат геометрические задачи. Решите вместе с древними учениками такую задачу.

Пусть основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите длины отрезков, параллельных основаниям и делящих площадь трапеции на 3 равные части.

2. Древнекитайский трактат «Математика в девяти книгах» содержит решения многих (очень часто прикладных) задач. Решите задачу из этого трактата.

Имеется дерево в 2 чжана длиной, обхват его 3 чи (1 чжан = 10 чи). У его подножия растет лиана, которая поднимается семью витками вокруг дерева до его вершины. Спрашивается, какова длина лианы? (Считайте, что дерево – это прямой круговой цилиндр.)

3. Диофант – последний великий математик античности – жил, по-видимому, в III веке н.э. Из его сочинений до нас (не полностью) дошли два: «Арифметика» и «О многоугольных числах». В «Арифметике» он среди прочего рассматривает неопределенные уравнения и разрабатывает методы их решения в рациональных числах (сейчас такие уравнения называют диофантовыми). В частности, он наверняка сумел бы ответить на такой вопрос.

Конечно или бесконечно количество решений в рациональных числах уравнения

$$x^2 - 3xy + 5y^2 = 3?$$

А как ответите на этот вопрос вы?

4. Последний выдающийся математик Александрийской школы Папп Александрийский жил в конце III – начале IV века н.э. Он, в частности, доказал следующую теорему.

Пусть на сторонах AB и AC треугольника ABC построены во внешнюю сторону параллелограммы $ABDE$ и $ACFG$. Пусть H – точка пересечения прямых DE и FG . Тогда сумма площадей параллелограммов $ABDE$ и $ACFG$ равна площади параллелограмма, стороны которого равны и параллельны отрезкам BC и AH . а) Докажите это. б) Обобщением какой знаменитой теоремы является эта теорема Паппа (объясните, почему)?

5. Создатель теории чисел Пьер Ферма (1601–1665) изучал целые числа, представимые некоторой квадратичной формой. В частности, ему пришлось иметь дело с предлагаемой вам задачей.

Пусть натуральные числа m и n таковы, что $m = x_1^2 + 2y_1^2$, $n = x_2^2 + 2y_2^2$, где x_1, x_2, y_1, y_2 – целые числа. Существуют ли целые x_3, y_3 такие, что $n = x_3^2 + 2y_3^2$?

Физика

1. В 1929 году Нобелевская премия по физике была вручена «за открытие волновой природы электронов». Но работа ученого, за которую была присуждена премия, открывала перед физиками гораздо более широкие горизонты. Была распространена идея А.Эйнштейна о корпускулярно-волновой природе света на всю материю.

а) Кто этот ученый? б) В какой стране он жил?

2. Вопрос устройства мира занимал людей с давних времен. Выдающиеся ученые античности, в частности Аристотель, сформулировали геоцентрическую гипотезу строения Вселенной. Эта гипотеза была господствующей почти две тысячи лет. Однако уже в Древней Греции были мыслители, которые отводили Земле более скромное место. По одной из гипотез все небесные тела вращались вокруг Великого центрального огня, другая гипотеза была гелиоцентрической – в центр Вселенной ставила Солнце.

Назовите древнегреческих ученых – авторов этих гипотез.

3. 2009 год объявлен ООН годом астрономии. В этом году отмечается 400 лет со времени изготовления первого астрономического прибора, давшего возможность подробно изучать звездное небо, находя на нем новые, прежде невидимые объекты. Автором этого прибора был великий физик, разработавший фундаментальные основы современной механики.

а) О каком приборе идет речь? б) Кто создатель этого прибора? в) В какой стране он жил? г) Чем этот прибор отличается от аналогичного прибора, созданного современным этим ученым, выдающимся астрономом И.Кеплером?

4. Современные научно-технические разработки основаны на нанотехнологиях. Для их осуществления требуется информация о расположении отдельных атомов и молекул вещества. В 1986 году был построен первый прибор, позволяющий получить такую информацию. В основе этого прибора лежит использование сил Ван-дер-Ваальса, действующих между атомами зонда и отдельными частицами вещества, а регистрирует это взаимодействие измеритель наноперемещений. Этот прибор может использоваться для определения микрорельефа поверхности любых веществ, как проводящих, так и непроводящих, с его помощью можно наблюдать всевозможные несовершенства структуры, локализованные на изучаемых поверхностях, например дислокации или заряженные дефекты, а также всяческие примеси.

а) Что это за прибор? б) Какие другие приборы для рассмотрения микроструктур вы знаете?

5. 130 лет назад скончался великий английский физик. Он работал в различных областях физики, и в каждой из этих

областей обязательно найдется результат, названный его именем. Все его достижения значительны, но одно из них связало в единое целое три раздела физики, которые до этого считались обособленными. Ряд предсказаний его теории довольно быстро подтвердились экспериментально, а некоторые стали широко использоваться в технике. Эта теория стала фундаментом как для классических разделов физики, так и для ряда новых направлений. Особенностью его взглядов было отрицание необходимости использования векторов в физических соотношениях, поэтому для изложения нескольких дифференциальных уравнений, которые составляют сущность упомянутой теории, ему пришлось написать двухтомный труд.

а) Назовите этого ученого. б) О какой теории идет речь?

Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, А.Кравцов, В.Крыштон, Ж.Работ

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

КМШ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. Всего есть пять чисел, у которых трехзначные кубы: $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$. Ни число КУБ, ни число ШАР не равны 343, так как в каждом из них все цифры разные. Но во всех оставшихся кубах есть общая цифра 2, а в числах КУБ и ШАР общих цифр нет.

2. Воспользуемся палеткой. Так называют прозрачную клетчатую пленку с ячейками 1×1 , которую используют для нахождения приближенного значения площадей фигур. Наложим

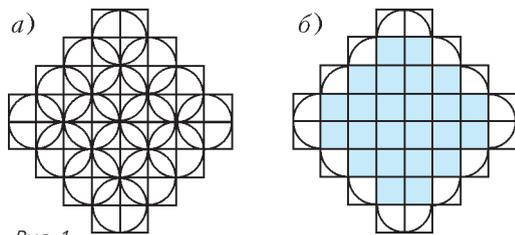


Рис. 1

палетку на фигуру так, как показано на рисунке 1, а. Теперь ясно из рисунка 1, б, что фигура содержит 24 целые клетки и еще 16 четвертинок круга. Учитывая, что площадь единичного круга равна π , получим, что площадь данной фигуры равна $24 + 4\pi$.

3. Первые примеры показывают, что и Сашу, и Артема, и Машу учили составлять буквы из отрезков.

Пока толщина отрезка остается малой (по сравнению с его длиной), мы легко узнаем буквы. Но когда толщина отрезка становится очень большой, отрезки превращаются в прямоугольники, и буквы становятся совершенно неузнаваемыми.

Для расшифровки Машинной записи нам надо выяснить, чему равна толщина плакатного пера (рис. 2). Этот размер имеет одна из сторон каждого прямоугольника-отрезка. Сравним прямоугольники,

находящиеся на первом плане, — это вертикальные прямоугольники в первой и шестой фигурах. У них одинаковые стороны имеют длину 4 клетки. Это и есть ширина плакатного пера. Теперь приступаем к разгадке Машинной записи. Нам надо каждый прямоугольник сжать в отрезок вдоль его стороны, равной 4 клеткам, т.е. провести среднюю линию прямоугольника. То, что у нас получилось, показано на рисунке 3.



Рис. 2

Итак, ответ — ГЕОМЕТРИЯ.

4. Нет, у дворников другая цель.

Температура плавления смеси снега с солью ниже, чем у чистого снега. Когда дворник посыпает дорожку солью, снег взаимодействует с солью и образуется раствор соли в воде. Температура замерзания этого раствора ниже температуры воздуха, раствор стекает с дорожки, и снег исчезает. Вот почему у дворников, знающих эту тайну рассолов, дорожки чистые от снега, даже когда на улице мороз.

5. Выигрывает лама.

Заметим, что один из учеников берет всегда нечетное число спичек, а другой — четное (возможно, 0, если он вынужден пропустить ход). Поэтому, независимо от ходов учеников, перед каждым ходом мудрого ламы на столе будет находиться нечетное число спичек, а после любого хода ламы — четное. Значит, у ламы всегда будет ход, и поскольку после каждого его хода число спичек на столе уменьшается, лама выигрывает.

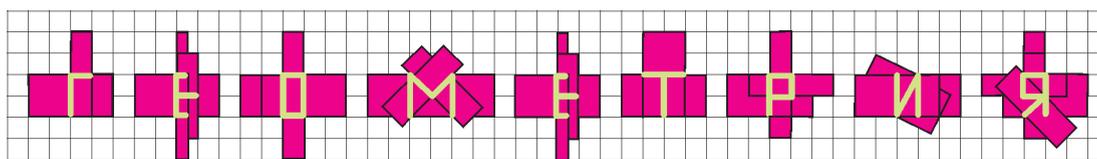


Рис. 3

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №6 за 2009 г.)

11. Знаки арифметических действий и скобки можно расставить, например, так: $(7^3 - 7^4 - 7^3) : 7^2 \cdot 7 \cdot 1 = 2009$. Но есть и другие способы.

12. Пусть $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ – возрастающее число, т.е. $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1 < a_0$. Тогда

$$9A = 10A - A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 0} - \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = \\ = a_n \cdot 10^{n+1} + (a_{n-1} - a_n) \cdot 10^n + \dots + (a_0 - a_1 - 1) \cdot 10 + (10 - a_0).$$

В последнем выражении все коэффициенты перед степенями 10 суть неотрицательные целые числа (очевидно, не превосходящие 9), а коэффициент a_n при старшей степени положителен. Значит, это и есть цифры числа $9A$, а их сумма равна

$$a_n + (a_{n-1} - a_n) + \dots + (a_1 - a_2) + (a_0 - a_1 - 1) + 10 - a_0 = 10 - 1 = 9.$$

13. Можно.

Покажем, как получить расположение, изображенное на рисунке 2 условия задачи.

Заметим, что если не обращать внимания на перемещение остальных фишек, то фишки 1 и 2 нетрудно поменять местами. Для этого нужно выполнить всего четыре вращения квадратов 2×2 на углы, кратные 90° , в такой последовательности: левый – по часовой стрелке на 90° , правый – против часовой стрелки на 90° , левый – против часовой стрелки на 90° , и правый – на 180° . На рисунке 4 показано перемещение фишек при этих вращениях.

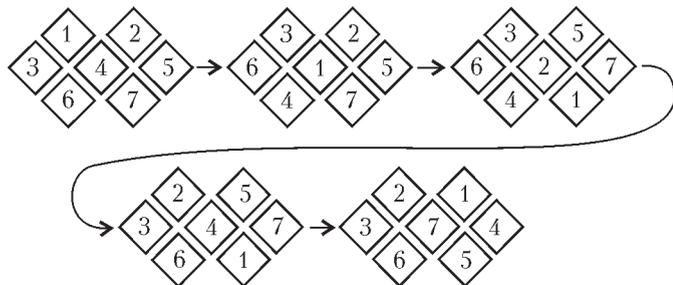


Рис. 4

Сравнивая начальное и конечное расположение фишек, проследим, какое перемещение совершила каждая фишка. Перемещение каждой фишки обозначим стрелкой. Точками отметим

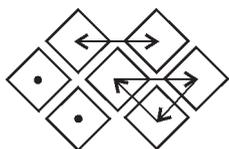


Рис. 5

фишки, которые вновь оказались на своих местах. Получим схему, показанную на рисунке 5.

Заметим, что фишки 1 и 2, как мы и ожидали, поменялись местами, фишки 3 и 6 остались на своих местах, фишки 4, 5 и 7 переместились по циклу.

Это значит, что если эту серию из четырех вращений повторить трижды, то фишки 4, 5 и 7 снова станут на свои места, а фишки 1 и 2 поменяются местами.

Теперь покажем, как получить расположение, изображенное на рисунке 3 условия.

С помощью двух вращений левого и правого квадратов переместим фишку 3 на место фишки 1, а фишку 5 переместим на место фишки 2. Далее, фишки 3 и 5 поменяем местами (как мы уже научились при ответе на первый вопрос задачи). Остается вращением правого квадрата переместить фишку 3 в крайнее правое положение, а вращением левого квадрата переместить фишку 5 в крайнее левое положение. Процесс перемещения показан на рисунке 6.

14. Заметим, что всегда $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ (домножив это неравенство на 2 и перенеся все в левую часть, его можно

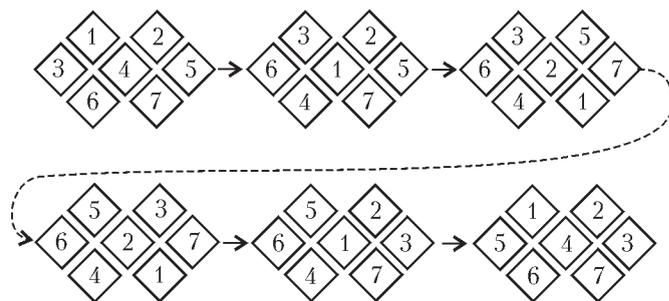


Рис. 6

привести к виду $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$).

Поэтому в нашем случае

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) \geq 3(ab+bc+ac) = 3.$$

Осталось доказать, что $a+b+c > 0$ (тогда, извлекая квадратный корень, получим требуемое). Пусть, например, $c < 0$, тогда числа a и b положительные. Из данного в условии равенства получим (так как $ac < 0$)

$$ab + bc > 0 \Rightarrow |ab| > |bc| \Rightarrow |a| > |c|, \text{ откуда } a + b + c > 0.$$

15. Пусть P, Q, R, S – середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$ соответственно (рис. 7). Рассмотрим

угол параллелограмма $PQRS$, не являющийся острым. Пусть это угол PQR . Тогда основания перпендикуляров, опущенных из точек Q и S на прямую PR , лежат на отрезке PR . Пусть это точки K и L соответственно.

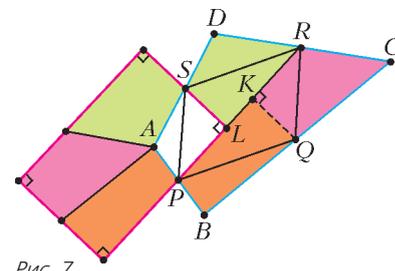


Рис. 7

Проведем разрезы по

отрезкам PR, QK и SL . Обозначим получившиеся части:

$$APLS - (1), BPKQ - (2), CRKQ - (3), DRLS - (4).$$

Соединим части следующим образом:

(2) повернем вокруг точки P так, чтобы точка B совместилась с точкой A ;

(4) повернем вокруг точки S так, чтобы точка D совместилась с точкой A ;

часть (3) вставим в образовавшийся зазор между повернутыми частями (2) и (4), совместив точку C с точкой A .

Легко видеть, что в результате получится прямоугольник.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Да; да; нет.
2. См. рис.8.
3. Будет в обоих случаях.
4. Постукивать необходимо, чтобы заставить частицы двигаться, так как магнитные силы не могут преодолеть сил трения покоя. За счет намагничивания каждой частицы в продольном направлении поле около ее концов увеличивается, что создает условия для соединения частиц цепочкой.

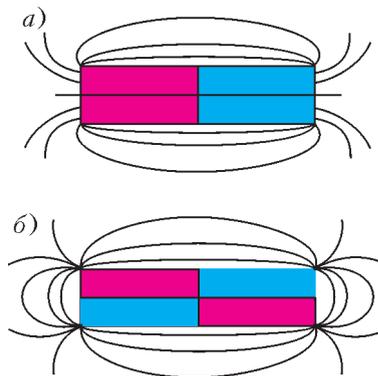


Рис. 8

5. По действию конца одного стержня на середину другого – один из стержней можно подвесить к динамометру или разместить на поплавке.
6. Все куски будут намагничены одинаково.
7. Нет, так как поле каждого магнита будет слабее.
8. Для того чтобы предохранить магнит от размагничивания.
9. Магнитное поле в основном будет замкнуто якорем, поэтому магнитное притяжение ослабевает, и шарик падает.
10. В первом случае по мере приближения нижнего магнита цилиндры будут один за другим отрываться от гирлянды и притягиваться к нижнему магниту. Во втором случае «прочность» гирлянды будет возрастать по мере приближения нижнего магнита. Когда второй магнит вплотную подойдет к нижнему цилиндру, он притянется к гирлянде и останется висеть на ней.
11. Стрелки расположатся параллельно противоположным сторонам треугольника – это положение устойчивого равновесия. Также стрелки могут расположиться перпендикулярно противоположным сторонам, однако это положение равновесия неустойчиво.
12. Удары по магниту нарушают правильное расположение доменов в веществе, и постоянный магнит из любого материала размагнитится. Напротив, постукивание по стальному стержню, расположенному параллельно линиям магнитного поля, даже такого слабого, как земное, способствует выстраиванию доменов вдоль поля, и стержень таким способом можно намагнитить.
13. Вблизи полюсов мала горизонтальная составляющая земного магнитного поля, и поэтому мал вращающий момент, действующий на стрелку компаса.
14. Вообще говоря, нет. В каждой точке земного шара имеется некоторое магнитное наклонение, т.е. направление магнитного поля не горизонтальное.
15. Нет. На Луне отсутствует магнитное поле.
16. Ферромагнетизм связан со свойствами довольно протяженных структур – доменов, которые могут существовать только в твердых телах.
17. Перешла во внутреннюю энергию раствора.

Микроопыт

Все железные предметы находятся в магнитном поле Земли. Под действием этого поля они намагничиваются, причем нижняя часть предмета обнаруживает северный магнитный полюс, а верхняя – южный (разумеется, в северном полушарии), что и «выдает» магнитная стрелка.

СВЕРХЗВУКОВЫЕ САМОЛЕТЫ И КОНУС МАХА

Задача 2. В обоих случаях надо найти время, через которое конус Маха, коснувшись первого микрофона, коснется второго. а) Посмотрите на рисунок 9,а, на котором нарисована лишь половинка конуса Маха и трасса самолета проложена прямо через микрофоны. Вершина конуса – это сам самолет, поэтому движется она со скоростью самолета. Чтобы дойти до второго микрофона, ей понадобится время

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{v} = \frac{\Delta l}{2c} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

б) В этом случае посмотрите на рисунок 9,б. Чтобы конус Маха коснулся второго микрофона, самолету надо пройти путь $\Delta s = \Delta l \operatorname{ctg} \alpha = \Delta l \sqrt{M^2 - 1}$. Для этого нужно время

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{\Delta l \sqrt{M^2 - 1}}{2c} = 3,46 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

Задача 3. В пространственном случае под точкой З надо понимать не зенит, а ближайшую к наблюдателю точку на траектории самолета, и для длины отрезка ЗН брать не высоту

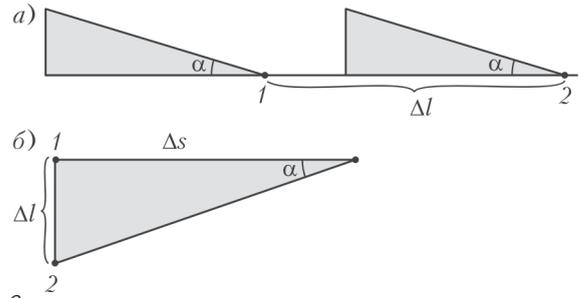


Рис. 9

полета h , а минимальное расстояние $\sqrt{h^2 + d^2}$ от наблюдателя до траектории (рис. 10). Воспользуемся формулой (полученной

в задаче 1) $h = \frac{v \Delta t}{\sqrt{M^2 - 1}}$ и запишем для каждого

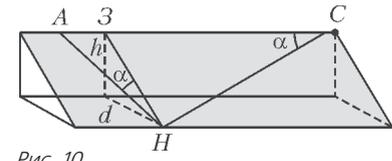


Рис. 10

наблюдателя выражение для времени регистрации звукового сигнала:

$$t_1 = \frac{\sqrt{M^2 - 1} h}{M c}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{M^2 - 1} \sqrt{h^2 + a^2}}{M c},$$

$$t_3 = \frac{\sqrt{M^2 - 1} \sqrt{h^2 + b^2}}{M c}.$$

Все времена отсчитаны от момента прохождения самолетом «зенита», которым для всех трех наблюдателей является точка З. В условии задачи задаются не сами времена, а разности времен, поэтому система уравнений будет иметь вид

$$c \Delta t_2 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} (\sqrt{h^2 + a^2} - h),$$

$$c \Delta t_3 = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M} (\sqrt{h^2 + b^2} - \sqrt{h^2 + a^2}).$$

Решение этих уравнений дает

$$H = 6000 \text{ м}, \quad M = 1,16.$$

Задача 4. На рисунке 11 изображен момент, когда первый летчик (более быстрый) услышит звук второго самолета. Рассмотрим треугольник AC_1C_2 . В этом треугольнике нам заданы три величины:

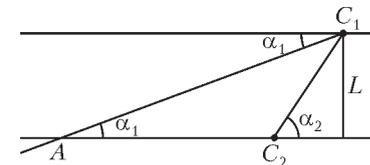


Рис. 11

Рассмотрим треугольник AC_1C_2 . В этом треугольнике нам заданы три величины: $\angle C_1AC_2 = \alpha_1$, $\angle AC_2C_1 = 180^\circ - \alpha$ и $AC_2 = (v_1 + v_2) \Delta t$. Расстояние между самолетами в тот момент, когда первый летчик слышит самолет второго, равно

$$C_1C_2 = (v_1 + v_2) \Delta t \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = c \Delta t \frac{(M_1 + M_2) M_2}{\sqrt{M_1^2 - 1} - \sqrt{M_2^2 - 1}},$$

расстояние между самолетами в момент, когда второй летчик услышит первый самолет, равно

$$AC_1 = (v_1 + v_2) \Delta t \frac{\sin \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = c \Delta t \frac{(M_1 + M_2) M_1}{\sqrt{M_1^2 - 1} - \sqrt{M_2^2 - 1}},$$

а расстояние между траекториями самолетов составляет

$$L = C_1C_2 \sin \alpha_2 = (v_1 + v_2) \Delta t \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} =$$

$$= c \Delta t \frac{M_1 + M_2}{\sqrt{M_1^2 - 1} - \sqrt{M_2^2 - 1}}.$$

Задача 6. Сразу после того, как первый самолет пересечет

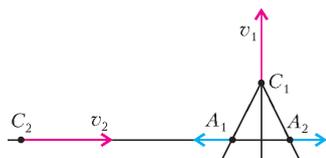


Рис. 12

траекторию второго, на ней появятся две точки: A_1 и A_2 (рис.12). Первая будет двигаться навстречу второму самолету, а вторая – от него. Скорости обеих точек равны

$$v_{\perp} = \frac{v_1}{\sqrt{M_1^2 - 1}}.$$

Второй летчик будет слышать звук первого самолета, пока будет находиться внутри конуса Маха первого самолета, т.е. между точками A_1 и A_2 . Пусть t_1 – время встречи второго самолета с точкой A_1 , а t_2 – время, когда второй самолет догонит точку A_2 , тогда для «длительности звучания первого самолета» Δt получим

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Если расстояние между самолетами было равно L и они движутся навстречу друг другу со скоростями v_2 и v_{\perp} , то они встретятся через время

$$t_1 = \frac{L}{v_2 + v_{\perp}}.$$

Если же один из самолетов движется в другую сторону, то второй нагонит первого через время

$$t_2 = \frac{L}{v_2 - v_{\perp}}.$$

Объединяя эти два ответа, окончательно получаем

$$\Delta t = \frac{2v_{\perp}}{v_2^2 - v_{\perp}^2} L = \frac{2M_1 \sqrt{M_1^2 - 1}}{M_1^2 M_2^2 - M_1^2 - M_2^2} \frac{L}{c} = 2,85 \text{ с}.$$

А вот пилот первого самолета никогда не услышит звука второго самолета, так как его скорость $v_1 = M_1 c = 990$ м/с больше скорости точки пересечения его траектории с конусом Маха второго самолета $v = \frac{v_2}{\sqrt{M_2^2 - 1}} = 341$ м/с.

НЕРАВЕНСТВО КОШИ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ

- $v_{\min} = \sqrt{lg} = 20$ м/с, причем минимум достигается при броске под углом 45° .
- Поезд B будет находиться в самом городе; наименьшее расстояние между поездами будет $l_{\min} = 7$ км.
- $h = \frac{v_0^2}{4g} = 3,6$ м; $s_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 7,2$ м.
- $\alpha < \arcsin \frac{\sqrt{8}}{3} \approx 70,5^\circ$. 5. $\alpha = \arctg(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})$.
- Скорость пассажира равна \sqrt{la} и составляет угол 45° с направлением движения поезда.

XVIII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

Математика

- 6.
- 30° .

Указание. Опустите из точки D перпендикуляр на прямую BC .

3. $x = y = z = 2$. Почленно вычитая из первого уравнения второе, затем – из второго третье, получим

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = y - z, \\ y^3 - z^3 = z - x. \end{cases}$$

Докажем, что $x = y = z$. Пусть $x > y$. Тогда из системы имеем $x > y > z > x > y$, т.е. $y > y$. Противоречие.

Аналогично доказывается невозможность неравенства $y > x$. Осталось решить уравнение $x^3 - x - 6 = 0$, равносильное уравнению $(x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$; у второго сомножителя отрицательный дискриминант.

4. 0. Поскольку $\frac{x^2}{y+z} + x = \frac{x^2 + xy + zx}{y+z}$, находим, что $\frac{x^2}{y+z} = \frac{x}{y+z}(x+y+z) - x$. Выписав еще два аналогичных равенства, сложим почленно все три. Получим

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = (x+y+z) \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} - 1 \right).$$

5. а) Можно; б) нет.

а) Пусть за победу команда получает 1 очко. Каждая команда сыграла 7 игр, в каждой из которых разыгрывалось 1

очко, поэтому всего разыграли $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ очков.

Заметим теперь, что найдется команда, выигравшая у 4-х команд (иначе все 8 команд набрали всего не более чем $3 \cdot 8 = 24 < 28$ очков). Пусть это команда A , а выиграла она у команд B, C, D и E .

Аналогично, среди команд B, C, D и E найдется команда, выигравшая у двух других из этих четырех команд. Пусть B выиграла у C и D . В паре C и D одна команда выиграла у другой, пусть это команда C . Тогда четверка A, B, C, D исковая.

б) Построим контрпример.

Команды A, B, C, D, E, F, G изобразим точками на плоскости (рис.13) и направим стрелку от точки, изображающей команду-победительницу, в точку, изображающую проигравшую команду. Из рисунка видно, что каждая команда выиграла ровно у трех других команд, выигравших друг у друга «по циклу». Поэтому ситуация, описанная в условии, невозможна.

6. Пусть $n, n+1, n+2, n+3$ – площади указанных в условии треугольников, взятых в некотором порядке, S – площадь данного четырехугольника, x – площадь треугольника CEF (рис. 14,а). Тогда $S = 4n+6$, а поскольку EF – средняя линия треугольника BCD и отсекает поэтому от него четверть

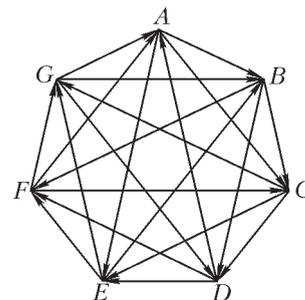


Рис. 13

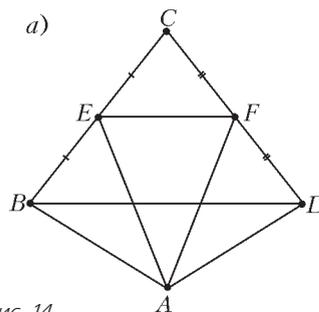
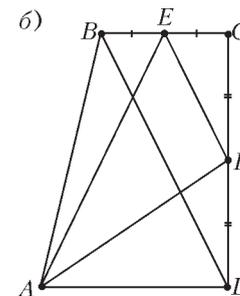


Рис. 14



площади, то площадь треугольника BCD равна $4x$. Значит, для площади треугольника ABD , с учетом очевидного неравенства $x \geq n$, справедливы соотношения:

$$S_{ABD} = 4n + 6 - 4x = 4(n - x) + 6 \leq 6.$$

Приведем пример четырехугольника, для которого выполнены условия задачи и при этом $S_{ABD} = 6$.

Возьмем прямоугольную трапецию $ABCD$ (рис.14,б) с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$, прямым углом при вершине C и боковой стороной $CD = 4$, точки E и F пусть будут серединами сторон BC и CD соответственно. Тогда $S_{CEF} = 1$, $S_{ABE} = 2$, $S_{AFD} = 3$, $S_{ABCD} = 10$, $S_{AEF} = 4$, $S_{ABD} = 6$.

7. а) Выигрывает первый; б) при $m \neq 1$ выигрывает первый, при $m = 1$ – второй.

а) Пусть для определенности $m \leq n$ и меньшая сторона вертикальна. Тогда первый игрок своим первым ходом закрашивает квадрат, центр которого совпадает с центром данного прямоугольника, а сторона равна m , а далее на каждый ход второго отвечает симметрично относительно вертикальной средней линии исходного прямоугольника (рис.15,а).

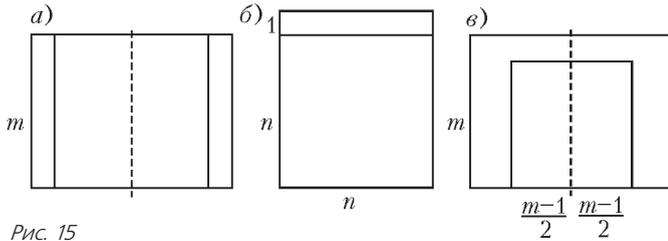


Рис. 15

б) Пусть снова сторона длины m исходного прямоугольника вертикальна. В случае $n + 1 = m$ первый игрок сначала закрашивает квадрат со стороной n . Останется незакрашенная горизонтальная полоска $1 \times n$ (см. рис.15,б) и первый игрок снова выигрывает, т.к. после каждого хода второго остается нечетное число незакрашенных клеток.

Если же $n + 1 > m > 1$, то первый игрок первым ходом закрашивает квадрат $(m-1) \times (m-1)$, вертикальная ось симметрии которого совпадает с осью симметрии исходного прямоугольника (рис.15,в). Останется незакрашенной фигура в форме буквы П, симметричная относительно оси прямоугольника. На любой ход второго игрока первый отвечает симметричным относительно этой оси ходом и тем самым выигрывает.

Если же $m = 1$, то очевидно, выигрывает второй.

Замечание. Если m – нечетно, n – четно и $m > n$, то, по-видимому, выигрывает второй. Попробуйте это доказать.

Физика

1. $l = v_0 \sqrt{\frac{L}{\mu g}} \approx 28,3 \text{ м}$; $t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{\mu g}} \approx 4,44 \text{ с}$. 2. $A = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}$.

3. *Указание.* Двигатель и холодильную машину можно рассматривать как одну термодинамическую систему, совершающую циклический процесс.

4. $p_2 = p_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$, $p_3 = p_1 \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}$.

5. $\Delta h = \frac{mv_0}{Mg} \left(\sqrt{v_0^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 + 2gL} - v_0 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \right) \approx 8,8 \text{ см}$.

6. $v = \sqrt{\frac{2q^2}{3\pi\epsilon_0 a m}}$.

7. $T = 4\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 14500 \text{ с} \approx 4 \text{ ч } 1 \text{ мин}$; $\frac{v_a}{v_{ii}} = \frac{1}{3}$.

Устный командный тур

Математика

1. 69. На 8 делятся только те натуральные числа, последние три цифры которых образуют число, делящееся на 8. Поэтому в искомом числе надо взять максимально возможные первые 5 цифр. Далее несложным перебором находим ответ – это число 99999888.

2. 60° . Пусть O – точка пересечения указанных в условии линий, M – середина стороны AB исходного треугольника. Тогда прямоугольные треугольники AMO и AHO равны (по гипотенузе и острому углу), поэтому равны отрезки AM и AH . Это означает, что в прямоугольном треугольнике ABH катет AH равен половине гипотенузы AB , откуда угол ABH равен 30° , а искомый угол A исходного треугольника равен 60° .

3. $407 = 250 + 125 + 32$.

4. 40 км/ч . *Указание.* Пусть t – промежуток времени, упомянутый в условии. Тогда при прохождении автобуса мимо первого наблюдателя расстояние от него до грузовика и легкового автомобиля равны соответственно $30t$ и $120t$. При прохождении автобуса мимо второго наблюдателя расстояния будут равны $60t$ и $60t$, т.е. в этот момент легковой автомобиль догонит грузовик. Поэтому от момента прохождения автобуса мимо первого наблюдателя до момента его прохождения мимо второго, проходит время $\frac{90t}{60-30} = 3t$. Пусть V – скорость автобуса. Так как расстояние от легкового автомобиля до автобуса во второй момент равно $60t$, то

$$\frac{20t - 60t}{60 - V} = 3t,$$

Откуда $V = 40 \text{ км/ч}$.

5. Верно. Среди любых двенадцати двузначных чисел найдутся два, дающие при делении на 11 одинаковые остатки. Их разность делится на одиннадцать и является двузначным числом.

6. 2525. Если из каждого числа, большего 50, вычтем 50, то вместе с числами, не превосходящими 50, полученный набор состоит из всех чисел $1, 2, \dots, 50$. Поэтому суммы всех данных чисел равны $1 + 2 + \dots + 50 + 50 \cdot 25 = 2525$.

7. а) Нет; б) нет; в) да.

Дискриминант трехчлена $ax^2 + bx + c$ равен $b^2 - 4ac$.

а) Равенство $b^2 - 4ac = 2010$ при целых a, b и c невозможно, ибо при нечетном b левая часть нечетна, а при четном b она делится на 4.

б) Равенство $b^2 - 4ac = 2011$ невозможно (при нечетном b левая часть при делении на 4 дает в остатке 1, а правая – 3).

в) Например, подходит трехчлен $2x^2 + 46x + 13$.

8. $AD + BC \geq CD$. Продлим отрезок DM за точку M до точки E так, что $EM = MD$ (рис.16). Тогда $ADBE$ – параллелограмм (диагонали этого четырехугольника в точке пересечения делятся пополам). Поэтому $AD = BE$. Кроме того, треугольник CDE – равнобедренный (в нем высота CM одновременно и медиана), поэтому $CD = CE$ и $AD + BC = BE + BC \geq CE = CD$. Равенство возможно лишь при $AD \parallel BC$.

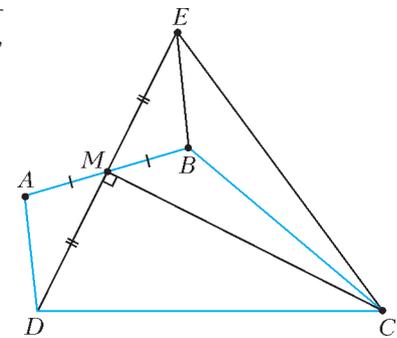


Рис. 16

9. Существуют. Рассмотрим 1000 последовательных натуральных чисел, начиная с числа 2. По-

нятно, что среди них больше 5 простых (первые 5 простых чисел – 2, 3, 5, 7, 11). Начнем сдвигать наши 1000 чисел по натуральному ряду на одно число. При каждом сдвиге количество простых чисел среди них может измениться не более чем на 1. На каком-то шаге у нас получится (см., например, условие), что простых чисел 0. Значит, где-то по дороге оно было равно 5.

10. Верно. Если $\sqrt{a+b} < \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, то $\sqrt{a+b} > 2$ и $a + b > 4$.

11. Нет. При любой расстановке десяти цифр 0, 1, ..., 9 в вершинах 45 угольника хотя бы одна из цифр будет записана не более, чем в 4-х вершинах. Но тогда она будет образовывать не более 8 пар со своими соседями, тогда как всего пар с участием этой цифры 9.

12. Верно. Рассмотрим квадратный трехчлен $y(x) = ax^2 + bx + c$. Неравенство из условия может быть записано так: $f(0) \cdot f(1) < 0$. Это значит, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет в точности один корень в промежутке (0; 1). Следовательно $b^2 > 4ac$.

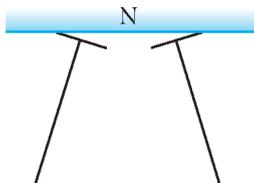


Рис. 17

Физика

1. См. рис.17. Указание. Гвозди намагничиваются так, что нижние концы гвоздей становятся одноименными полюсами магнита.

2. Нет, если под вертикалью понимать перпендикуляр к горизонтальной плоскости (касательной к земному шару).

3. $\Delta m = \frac{cm\tau}{\lambda} = 105$ г (здесь c – удельная теплоемкость воды, λ – удельная теплота плавления льда).

4. $\beta = 45^\circ$.

5. Ускорение мяча максимально в начальный момент полета и минимально в момент окончания полета.

6. При малом угле наклона плоскости сила, прижимающая к ней цилиндр, больше силы, прижимающей цилиндры друг к другу, в результате чего между цилиндрами возникает проскальзывание. При большом угле наклона прижимающая сила между цилиндрами больше, и верхний цилиндр скользит по плоскости.

7. $q'_1 = 0$, $q'_2 = 4\pi\epsilon_0(r_1\phi_1 + r_2\phi_2) \approx 5,3$ нКл,

$\phi'_1 = \phi'_2 = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = 477$ В.

8. $U_{34} = 2U_0$. 9. $I_r = 0$.

10. $\alpha = \arctg \frac{gt^2}{2L}$; после того как бусинка соскользнет со стержня, он продолжит вращение с постоянной скоростью.

История научных идей и открытий

Математика

1. $\sqrt{\frac{2a^2 + b^2}{3}}$ и $\sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{3}}$. Указание. Длина отрезка, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам, равна $\sqrt{\frac{u^2 + v^2}{2}}$, где u и v – длины оснований трапеции.

2. 29 чи. Прокатим дерево по горизонтальной плоскости так, чтобы лиана распрямилась и стала диагональю прямоугольника со сторонами 20 чи и 21 чи.

3. Бесконечно. Заметим, что точка $A(1;1)$ удовлетворяет уравнению. Проведем произвольную прямую с рациональным угловым коэффициентом k . Уравнение такой прямой имеет вид $y - 1 = k(x - 1)$. Подставив $y = kx - k + 1$ в исходное

уравнение, приходим после преобразований к уравнению $Ax^2 + Bx + C = 0$ с целыми A , B и C , причем $x_1 = 1$ – корень последнего уравнения. Второй корень его $x_1 = \frac{C}{A}$ – рациональное число. Пара (x_1, y_1) , где

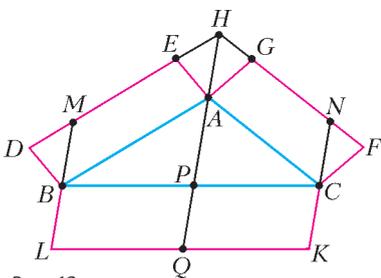


Рис. 18

$y_1 = kx_1 - k + 1$, – решение исходного уравнения в рациональных числах.

4. а) Пусть $BCKL$ – параллелограмм со стороной CK , равной и параллельной AH (рис.18). Тогда параллелограммы $CPQK$, $AHNC$ и $ACFG$ имеют одинаковые площади. Аналогично, равны площади параллелограммов $BLQP$, $BMHA$ и $ABDE$.

Поэтому $S_{BLKC} = S_{BLQP} + S_{CKQP} = S_{ABDE} + S_{ACFG}$, что и требовалось.

б) Теоремы Пифагора: сумма площадей квадратов, построенных на катетах, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

5. Существуют. Преобразуем произведение

$$\begin{aligned} (x_1^2 + 2y_1^2)(x_2^2 + 2y_2^2) &= x_1^2x_2^2 + 4y_1^2y_2^2 + 2x_1^2y_1^2 + 2x_2^2y_2^2 = \\ &= x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2y_1y_2 + 4y_1^2y_2^2 + 2(x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2) = \\ &= (x_1x_2 - 2y_1y_2)^2 + 2(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = x_3^2 + 2y_3^2. \end{aligned}$$

Физика

1. а) Луи де Бройль; б) Франция.

2. Филолай; Аристарх Самосский.

3. а) Оптический телескоп; б) Галилео Галилей; в) Италия; г) окуляром телескопа Галилея является рассеивающая линза, а телескопа Кеплера – собирающая.

4. а) Атомно-силовой микроскоп; б) например, электронный микроскоп, ионный проектор, сканирующий туннельный микроскоп, трехмерный атомно-зондовый томограф и др.

5. а) Джеймс Клерк Максвелл; б) теория электромагнитного поля.

Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов,
С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,
А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.В.Сумнина,
В.М.Хлебникова,**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

**Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473**

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: 930-56-48

E-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Сайт: kvant.info

**Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»**

142300 г.Чехов Московской области,

Сайт: www.chpk.ru E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672) 6-25-36, факс: 8(499) 270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

КОРОНА ОСТАЕТСЯ НА РОДИНЕ ШАХМАТ

В Софии с 24 апреля по 11 мая состоялся очередной поединок на первенство мира по классическим шахматам между чемпионом мира Виши Анандом и претендентом Веселином Топаловым.



Примерно равная борьба из 12 партий протекала очень увлекательно и напряженно – в каждой встрече игроки боролись до полного истребления сил. Все шло к мирному исходу и, значит, к тай-брейку в коротком матче в быстрые шахматы. Однако в заключительной партии Топалов, играя белыми, не сумел совладать с нервами, необоснованно вызвал огонь на себя и был наказан за это. Можно сказать, что в решающей встрече не столько выиграл Ананд, сколько проиграл Топалов. Итак, 6,5:5,5, и Виши Ананд сохранил свою корону, она снова в Индии.

Приведем две самые яркие партии матча.

В.Топалов – В.Ананд

1-я партия

Защита Грюнфельда

1. d4 ♟ f6 2. c4 g6 3. ♟ c3 d5. В предыдущем поединке за корону с Владимиром Крамником два года назад Ананд делал ставку на славянскую защиту, и удачный выбор себя полностью оправдал – после двух черных побед на старте дело было сделано. Впрочем, уже в следующей черной партии Ананд вернулся к славянской. 4. cd ♟ :d5 5. e4 ♟ :c3 6. bc ♟ g7 7. ♟ c4 c5 8. ♟ e2 ♟ c6 9. ♟ e3 0-0 10. 0-0. Одно из самых популярных разветвлений. У белых мощный пешечный центр, на который противник на-

мерен оказывать давление. 10... ♟ a5 11. ♟ d3 b6 12. ♟ d2. Забирать пешку c5, разрушая собственный центр, белым нет никакого резона. 12...e5 13. ♟ h6. При 13. d5 f5 у черных все в порядке. Но белые жертвуют пешку ради атаки на королевском фланге – после двойного взятия на d4 вперед двинется их пешотинец «f».

13...cd 14. ♟ :g7 ♟ :g7 15. cd ed 16. ♟ ac1. Год назад здесь же, в Софии, в матче с Гатой Камским – как раз за право бросить перчатку Ананду – Топалов предпочел сыграть сразу 16. f4 и после 16...f6 17. e5 ♟ d7 18. ef+ ♟ :f6 19. ♟ g3 ♟ h8 20. f5 gf 21. ♟ :f5 ♟ :f5 22. ♟ :f5 ♟ d6 23. ♟ af1 ♟ c6, черные в конце концов устояли. Ход ладьей более тонкий – во-первых, захвачена открытая линия, во-вторых, черный конь застревает на краю доски. 16... ♟ d6 17. f4 f6 18. f5 ♟ e5. Иначе в воздухе будет все время висеть удар e4-e5. 19. ♟ f4 g5 20. ♟ h5+ ♟ g8. Здесь заслуживало внимания отступление королем в угол доски, уступая поле g8 ладье. 21. h4 h6 22. hg hg 23. ♟ f3. Топалов не скрывает своих агрессивных намерений – ладья подтягивается ближе к неприятельскому королю. 23... ♟ f7?



Форсированно ведет к фиаско. Удар конем на f6 и так входил в планы белых, а здесь он только выигрывает в силе. После правильной реакции 23... ♟ d7! позиция оставалась весьма напряженной, при 24. ♟ g3 ответ 24... ♟ f7 уже вполне надежен. Черные ладьи соединились по последней горизонтали, и жертва коня 25. ♟ :f6 ♟ :f6 26. ♟ :g5 ♟ ac8 вела к непредсказуемым последствиям.

24. ♟ :f6! ♟ :f6. На 24... ♟ :f6 решается 25. ♟ h3! ♟ h8 (грозило вторжение обеих ладей в неприятельские тылы, а вот при слоне на d7 этот маневр черных отражал бы главные угрозы) 26. ♟ :h8 ♟ :h8 27. ♟ c7+ ♟ e8 28. ♟ :g5 с неизбежным матом. 25. ♟ h3 ♟ g8. Не спасает 25... ♟ f4 из-за 26.e5+! 26. ♟ h6+ ♟ f7 27. ♟ h7+ ♟ e8 28. ♟ cc7 ♟ d8 29. ♟ b5! ♟ :e4. Слон неуязвим ввиду взятия на d4. 30. ♟ :c8+! Эффектный заключительный удар. На 30... ♟ :c8 решается 31. ♟ d7+, а на

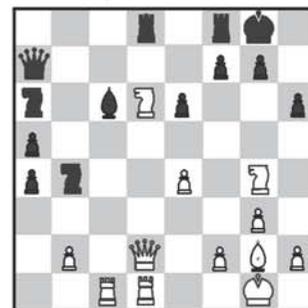
30... ♟ :c8 – 31. ♟ c1+. Черные сдались. Топалов вышел вперед.

В. Ананд – В. Топалов

4-я партия

Каталонское начало

1. d4 ♟ f6 2. c4 e6 3. ♟ f3 d5 4. g3 dc 5. ♟ g2 ♟ b4+. Продолжение дебютной дискуссии, но Топалов вносит уточнение. Во 2-й партии последовало сдержанное 5...a6. 6. ♟ d2 a5 7. ♟ c2 ♟ :d2+ 8. ♟ :d2 c6 9. a4 b5 10. ♟ a3. Новинка, специально припасенная Анандом, – белые не спешат с разменом на b5, который раньше следовал автоматически. 10... ♟ d7. Черные всеми силами держатся за лишнюю пешку. 11. ♟ e5 ♟ d5 12. e4 ♟ b4 13. 0-0 14. ♟ fd1. Все готово для прорыва d4-d5, но он откладывается на один ход. 14... ♟ e8 15. d5! ♟ d6 16. ♟ g4 ♟ c5. После острого 16...f5 17. dc происходит размен ферзей, который в данной ситуации Топалова не устроил. Его ферзь лавирует между собственными пешек, но при этом испытывает дискомфорт. 17. ♟ e3. Конь отступает, но только временно. 17... ♟ 8a6 18. dc ba 19. ♟ a:c4 ♟ :c6 20. ♟ ac1 h6. У белых по-прежнему за пожертвованную пешку серьезная инициатива. Но кто бы мог подумать, что этот внешне надежный ход вскоре позволит Ананду провести удивительную комбинацию. 21. ♟ d6. Опасного отскока у коня нет, но достаточно и того, что он внедряется в лагерь соперника. 21... ♟ a7 22. ♟ g4! А вслед за ним и второй конь подтягивается к месту событий. 22... ♟ ad8.



23. ♟ :h6+!! Фантастический удар, позволяющий белым быстро добиться цели. Эта внезапная жертва коня, принятая Анандом, похожа на другую, осуществленную Топаловым в первой партии, – ♟ :f6+. Последствия одинаковые – матовая атака. 23...gh 24. ♟ :h6 f6 25. e5! ♟ :g2 26. ef ♟ :d6 27. ♟ :d6 ♟ e4. Безуспешная попытка прикрыть короля. 28. ♟ :e6 ♟ d3 29. ♟ c2 ♟ h7 30. f7+! ♟ :f7 (30... ♟ :f7 31. ♟ e8+ с матом) 31. ♟ :e4 ♟ f5 32. ♟ e7. Черные сдались.

Е.Гук

Индекс 70465

Пена представляет собой совокупность пузырьков газа, разделенных жидкими (жидкая пена) или твердыми (твердая пена) прослойками. Такая структура пены объясняет ее удивительные свойства и многочисленные применения.

(Продолжение – на странице 8 внутри журнала)

Что
такое
пена?



Что такое пена?



Уроки с физикой

